

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE INTRODUCTION AUX CATÉGORIES DE FUKAYA

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ALEX PROVOST

MARS 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

Remerciements

Je tiens à offrir mes remerciements les plus sincères aux personnes suivantes, qui ont toutes contribué, directement ou indirectement, à la rédaction de ce mémoire :

Marco Robado et Maxime Scott, qui ont été comme des grands frères pour moi et avec qui j'ai eu la chance de partager maintes idées ;

Alice Remal, qui m'éblouit constamment, et dont le seul défaut est de s'inventer des défauts ;

Maxime Gélinas, dont la gentillesse, la bonne humeur et le sens de l'humour ne trouvent aucun égal ;

Jean-François Arbour, dont la sagesse et la patience immenses m'inspirent le plus haut respect ;

Jérôme Tremblay, qui m'a accueilli au poste informatique du LaCIM à bras ouverts même après ma transition au CIRGET ;

Lionel Katshingu, qui partage mon amour profond pour la musique ;

Jessica Legault, qui, à travers la joie et la douleur, m'a supporté jusqu'à la fin ;

France Pichette et Gérard Provost, à qui je dois mon existence et mon unicité ;

Martin Beaugrand, qui m'a fait réaliser que les mathématiques sont une fin et non pas un moyen ;

Christophe Hohlweg, qui m'a fait comprendre assez vite que le diable est dans les détails ;

Fernand Beaudet, dont la pédagogie légendaire est on ne peut plus inspirante ;

Franco Saliola, dont le rire est contagieux et qui réussit à rendre intéressantes toutes les mathématiques qu'il touche ;

Olivier Collin, mon directeur, qui, pendant les cinq dernières années, a façonné ma façon de penser, et qui a toujours été là pour moi.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| LISTE DES FIGURES | v |
| RÉSUMÉ | vii |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE I | |
| ALGÈBRE HOMOLOGIQUE | 3 |
| 1.1 Catégories abéliennes | 3 |
| 1.2 Cônes d'applications et triangles exacts | 11 |
| 1.3 A_∞ -algèbres, A_∞ -modules et A_∞ -catégories | 14 |
| CHAPITRE II | |
| TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE | 21 |
| 2.1 Un peu d'histoire | 21 |
| 2.2 Notions élémentaires de topologie symplectique | 22 |
| 2.3 La théorie linéaire | 29 |
| CHAPITRE III | |
| LA CATÉGORIE DE FUKAYA | 35 |
| 3.1 Courbes J -holomorphes et espaces de modules | 35 |
| 3.2 Homologie de Morse (en bref) | 42 |
| 3.3 Cohomologie de Floer lagrangienne (en très bref) | 45 |
| 3.4 La catégorie de Fukaya | 52 |
| 3.5 Générateurs et la catégorie de Fukaya dérivée | 55 |
| CONCLUSION | 59 |
| RÉFÉRENCES | 61 |

LISTE DES FIGURES

| Figure | Page |
|---|------|
| 1.1 Le foncteur de suspension | 9 |
| 1.2 Le cône d'application en topologie | 12 |
| 1.3 L'associaèdre K_2 de Stasheff | 15 |
| 1.4 Les termes apparaissant dans la relation quadratique d' A_∞ - associativité d'ordre 2 | 17 |
| 2.1 Le théorème des voisinages tubulaires de Weinstein | 28 |
| 3.1 Une bande pseudoholomorphe d'indice 1 « typique » | 39 |
| 3.2 Une partie d'une surface munie d'un flot de Morse-Smale (à gauche) et l'espace de modules correspondant (à droite) | 44 |

RÉSUMÉ

Ce mémoire se veut une introduction à la topologie symplectique et, plus précisément, à la construction de la catégorie de Fukaya associée à une variété symplectique.

Au premier chapitre, on introduit certains outils algébriques qui seront utiles pour décrire les constructions géométriques subséquentes. On commence par des notions assez générales d'algèbre homologique, pour ensuite se concentrer sur ce qu'on appelle les A_∞ -catégories. Beaucoup de constructions avec les catégories ordinaires admettent un analogue dans le monde A_∞ ; c'est en particulier le cas pour les catégories triangulées. L'intérêt de considérer ces objets algébriques est que la catégorie de Fukaya peut être dotée d'une structure de A_∞ -catégorie triangulée.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les rudiments de la topologie symplectique, et on tente de motiver l'engouement envers les sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique. Finalement, au dernier chapitre, on définit la catégorie de Fukaya pour certaines classes de variétés symplectiques; celle-ci est construite à partir des sous-variétés lagrangiennes de la variété en question et de leur cohomologie de Floer.

INTRODUCTION

La topologie symplectique est un champ d'études passionnant qui provient d'un mélange de systèmes dynamiques et de géométrie complexe. Des nombreux mathématiciens qui ont donné naissance et fait progresser le sujet à ses débuts, on trouve en particulier Arnold, Conley, Zehnder, Gromov et Floer.

La conjecture d'Arnold sur les points fixes de symplectomorphismes hamiltoniens, démontrée par Conley-Zehnder pour les tores et, plus tard, par Floer pour des variétés symplectiques dont le deuxième groupe d'homotopie est trivial, a grandement contribué au développement de techniques puissantes, propres à la topologie symplectique mais trouvant de plus en plus d'applications au reste des mathématiques.

C'est à Gromov que l'on doit l'idée essentielle qu'on peut étudier les variétés symplectiques en introduisant des *courbes pseudoholomorphes* sur celles-ci. Les espaces de modules de ces courbes ont une géométrie intéressante, et Gromov a démontré que certains d'entre eux admettent une compactification naturelle; en particulier, lorsque ces compactifications sont des variétés de dimension 0, il est possible de compter le nombre de courbes pseudoholomorphes vivant dans ces espaces de modules. Floer a utilisé ces idées pour développer sa cohomologie lagrangienne, qui compte les disques pseudoholomorphes dont les bords sont envoyés dans des sous-variétés lagrangiennes. C'est avec cet outil qu'il a démontré la conjecture d'Arnold.

La catégorie de Fukaya associée à une variété symplectique M est une construction algébrique qui encode énormément d'information pertinente à l'étude de M .

En particulier, elle contient les sous-variétés lagrangiennes de M et les groupes de cohomologie de Floer associés à celles-ci, en plus de certaines perturbations (dont l'existence est cruciale pour que le tout soit bien défini). En termes algébriques, la catégorie de Fukaya est un A_∞ -catégorie. Les catégories de Fukaya gagnent de plus en plus d'importance dans la recherche actuelle en topologie symplectique et dans les domaines connexes, en partie en lien avec le phénomène de symétrie miroir homologique conjecturé par Kontsevich en 1994.

Un problème pédagogique évident est que la construction de la catégorie de Fukaya est assez élaborée et requiert de nombreux outils provenant de différentes branches des mathématiques, ce qui peut être assez intimidant pour un nouvel initié à la topologie symplectique. Le but de ce mémoire est donc d'introduire les catégories de Fukaya de manière quelque peu informelle, de sorte à en extraire les idées importantes plutôt que les détails techniques (qui seraient de toute manière impossibles à couvrir en si peu de pages). En ce qui concerne les prérequis, on ne requiert pas beaucoup de connaissances d'algèbre ; le lecteur qui est familier avec les modules et qui a déjà fait un peu d'algèbre homologique et de théorie des catégories devrait s'y retrouver. Par contre, on suppose que le lecteur connaît certaines notions de base en topologie et en géométrie différentielle ; on utilise par exemple les notions de variétés lisses, formes différentielles, fibrés vectoriels, etc. Une bonne référence pour cette matière est (Lee, 2013).

CHAPITRE I

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

1.1 Catégories abéliennes

Il est possible de faire beaucoup d'algèbre homologique dans le cadre assez large des catégories *abéliennes* : ce sont des catégories où toutes les propriétés intéressantes d'une catégorie de modules sur un anneau sont satisfaites. Il y a de nombreuses excellentes références sur le sujet ; pour en lire plus, on recommande (Hilton et Stammbach, 1997), (Weibel, 1994) et le premier chapitre de (Kashiwara et Schapira, 1994).

Rappel. Une **catégorie** \mathcal{C} est la donnée d'une classe d'objets $\text{Ob } \mathcal{C}$ ainsi que, pour chaque paire d'objets $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, d'un ensemble de morphismes (ou flèches) $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. On requiert de plus une opération de composition

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

qui satisfait les règles usuelles d'associativité et d'identité.

Remarque. On écrit généralement $f : X \rightarrow Y$ au lieu de $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

La catégorie **opposée** à \mathcal{C} , notée \mathcal{C}^{op} , est identique à \mathcal{C} , sauf que les morphismes ont été renversés. Un **objet nul** dans \mathcal{C} , noté 0 , est un objet qui est à la fois initial et terminal : il satisfait que pour tout $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, il existe d'unique morphismes $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X)$ et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0)$.

Remarque. On peut facilement montrer qu'un objet nul est essentiellement unique, i.e., qu'il est unique à isomorphisme près. Ceci nous permet de parler du **morphisme nul** $0 \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ donné par la composition $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$, sans dépendance du choix d'objet nul.

Parler de **dualité** dans une catégorie revient à renverser toutes les flèches. Ainsi, la catégorie opposée est duale à la catégorie originale; le concept d'objet initial est dual au concept d'objet terminal.

Définition. Une catégorie \mathcal{A} est dite **additive** si :

- elle possède un objet nul;
- les ensembles de morphismes sont munis d'une structure de groupe abélien telle que la composition est bilinéaire;
- chaque ensemble *fini* d'objets admet un biproduit, i.e., un objet qui satisfait les propriétés universelles de produit et de coproduit au sens catégorique.

Rappel. Un **noyau** d'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est une paire

$$(\text{Ker } f, \text{ker } f) \in \text{Ob } \mathcal{A} \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Ker } f, X)$$

universelle parmi les paires (K, κ) satisfaisant $f \circ \kappa = 0$. Un **conoyau** est défini de manière duale.

Ainsi un noyau est essentiellement unique, et on parle souvent « du » noyau $\text{Ker } f$ (sans même mentionner le morphisme correspondant). Si les noyaux et conoyaux de f existent, on définit l'**image** $\text{Im } f$ d'un morphisme comme le noyau du conoyau de ce morphisme, et dualement pour la **coimage**.

Proposition 1.1.1. *Soit un morphisme $f : X \rightarrow Y$ dans une catégorie additive qui admet un noyau et un conoyau. Alors il existe un unique morphisme $\tilde{f} :$*

$\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker } f & \xrightarrow{\kappa} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\gamma} & \text{Coker } f \\
 & \searrow 0 & \downarrow \gamma' & & \uparrow \kappa' & & \nearrow 0 \\
 & & \text{Coim } f & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Im } f & &
 \end{array}$$

(ici, κ, κ' représentent des noyaux et γ, γ' des conoyaux).

Démonstration. La commutativité des deux triangles est donnée par définition de $\text{Im } f$ et $\text{Coim } f$. On commence par regarder le triangle de droite. On a $\gamma \circ f = 0$ par définition du conoyau, donc la propriété universelle de $\text{Ker } \gamma$ nous donne l'existence d'un morphisme $\alpha : X \rightarrow \text{Im } f$ tel que $f = \kappa' \circ \alpha$. Par définition du noyau, $0 = f \circ \kappa = \kappa' \circ \alpha \circ \kappa$, donc $0 = \alpha \circ \kappa$ puisque tout noyau est monique. Mais alors la propriété universelle de $\text{Coker } \kappa$ nous donne l'existence de l'unique morphisme $\tilde{f} : \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ désiré. \square

Définition. La catégorie additive \mathcal{A} est dite **abélienne** si en plus :

- tout morphisme possède un noyau et un conoyau ;
- pour tout morphisme f , le morphisme canonique $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ défini ci-dessus est un isomorphisme.

Exemples.

1. La catégorie des groupes abéliens, ou, plus généralement, la catégorie des modules sur un anneau fixé, est abélienne.
2. La catégorie des fibrés vectoriels sur un espace topologique n'est *pas* abélienne, parce que les noyaux n'existent pas en général.
3. La catégorie des faisceaux sur un espace topologique est abélienne. Ce fait crucial nous permet d'utiliser les méthodes d'algèbres d'algèbre homologique en géométrie algébrique. De même, la catégorie des faisceaux *cohérents* (qui généralisent les fibrés vectoriels) est abélienne. On reviendra très rapidement sur ce sujet lorsque l'on parlera de la conjecture de symétrie miroir homologique de Kontsevich.

Définition. On se place dans une catégorie abélienne. On dit qu'une suite de morphismes

$$\dots \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$$

est **exacte en** X_i si $f_i \circ f_{i-1} = 0$ et le morphisme induit $\text{Im } f_{i-1} \rightarrow \text{Ker } f_i$ est un isomorphisme. La suite est **exacte** si elle est exacte pour tout X_i .

Lemme 1.1.2. *Étant donné $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ exacte en Y , la condition $\text{Im } f \cong \text{Ker } g$ entraîne (en fait, est équivalente à) $\text{Coim } g \cong \text{Coker } f$.*

Démonstration. Soit $\alpha : \text{Coim } g \rightarrow \text{Coker } f$ le morphisme induit par l'universalité de $\text{Coim } g$ appliquée à $\text{coker } f \circ \text{ker } g = 0$. Soit $\beta : \text{Coker } f \rightarrow \text{Coim } g$ le morphisme induit par l'universalité de $\text{Coker } f$ appliquée à $\text{coker}(\text{ker } g) \circ f = 0$. On a $\alpha \circ \beta \circ \text{coker } f = \text{coker } f$ et $\beta \circ \alpha \circ \text{coker}(\text{ker } g) = \text{coker}(\text{ker } g)$, d'où α et β sont inverses l'un de l'autre (tout conoyau est épique). \square

Rappel. Un **foncteur** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une application qui envoie chaque objet $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sur un objet $FX \in \text{Ob } \mathcal{D}$, et chaque morphisme $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ sur un morphisme $Ff \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$. On requiert également que F préserve l'identité et la composition, i.e., $F(1_X) = 1_{FX}$ et $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$. Un foncteur **contravariant** de \mathcal{C} à \mathcal{D} est un foncteur de \mathcal{C}^{op} à \mathcal{D} .

Un foncteur entre catégories abéliennes est **exact à gauche** (resp. **exact à droite**) s'il préserve l'exactitude des suites exactes de la forme $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z$ (resp. $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$). Un foncteur est **exact** s'il est à la fois exact à gauche et exact à droite.

Proposition 1.1.3. *Un foncteur est exact si et seulement s'il préserve l'exactitude des suites exactes.*

Démonstration. Ceci découle de la décomposition de toute suite exacte en

séquence de suites exactes courtes « entrelacées »

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_i & \cong & K_{i+1} & \\
 & & \nearrow & & \nwarrow & & \\
 \cdots & \xrightarrow{f_{i-1}} & X_i & \xrightarrow{f_i} & X_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & \cdots \\
 & \nwarrow & & & \searrow & & \\
 & K_i & & & & & C_{i+1}
 \end{array}$$

où $K_i = \text{Ker } f_i$, $C_i = \text{Coker } f_{i-1}$.

Les isomorphismes d'entrelacement proviennent de l'exactitude et du lemme 1.1.2 :

$$C_i = \text{Coker } f_{i-1} \cong \text{Coim } f_i \cong \text{Im } f_i \cong \text{Ker } f_{i+1} = K_{i+1}.$$

Un argument similaire à celui de la preuve du lemme 1.1.2 montre que la suite (f_i) est exacte si et seulement si les suites courtes le sont. \square

Rappel. Un foncteur est un **isomorphisme de catégories** s'il possède un foncteur inverse, ou bien, de manière équivalente, s'il est bijectif sur les objets et les morphismes.

Exemples.

1. Pour toute catégorie \mathcal{C} et tout objet $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on a un foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ qui agit sur les applications par composition. Ici, Ens est la catégorie des ensembles. De manière analogue, on a un foncteur contravariant $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$. (Celui-ci est l'exemple canonique d'un *préfaisceau représentable*.)
2. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $X \in \mathcal{A}$. Notons par Ab la catégorie des groupes abéliens. Alors la construction ci-dessus donne des foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X) : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ qui sont tous deux exacts à gauche.

3. Le foncteur de dualité entre espaces vectoriels (envoyant V sur V^* et une application linéaire sur sa transposée) est un exemple d'un foncteur contra-variant et exact.
4. Soit Top_* la catégorie des espaces topologiques pointés : ses objets sont les espaces topologiques dotés d'un point de base distingué, et ses morphismes sont les applications continues qui préservent le point de base. On définit un endofoncteur $\Omega : Top_* \rightarrow Top_*$, le **foncteur de lacets**, par

$$\Omega = \text{Hom}_{Top_*}(S^1, -). \quad (1.1.1)$$

Ici, on munit ΩX de la topologie compacte-ouverte, et son point de base est le lacet constant qui envoie tout S^1 sur le point de base de X . On vérifie facilement que ce foncteur est bien défini, i.e., que Ωf est continue et préserve le point de base, pour toute $f \in \text{Hom}_{Top_*}(X, Y)$; il suffit de vérifier que les ouverts sous-basiques de ΩY sont préservés par le tiré en arrière de Ωf , ce qui découle de la continuité de f .

5. Le foncteur de **suspension** $S : Top \rightarrow Top$ envoie un espace topologique X sur $SX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0, 1\})$ (voir la figure 1.1). Il existe également une version pointée de ce foncteur, qui est adjoint à Ω .

À partir d'une catégorie abélienne \mathcal{A} , on peut construire la catégorie $Ch(\mathcal{A})$ des **complexes de chaines** sur \mathcal{A} , qui est également abélienne. Un complexe de chaines $C = (X_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille d'objets de \mathcal{A} (on dit que X_n est de **degré** n) et de **différentielles** $\partial_n : X_n \rightarrow X_{n-1}$ qui satisfont $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Souvent, par abus de notation, on laisse tomber les degrés et on écrit simplement $\partial^2 = 0$. Un **morphisme de chaines** $f : (X_n, \partial_n^X) \rightarrow (Y_n, \partial_n^Y)$ est simplement une famille de morphismes $f_n \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_n, Y_n)$ qui commutent avec les différentielles, i.e., telles que $f_n \circ \partial_{n+1}^X = \partial_{n+1}^Y \circ f_{n+1}$.

On appelle $Z_n = \text{Ker } \partial_n$ (resp. $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$) l'ensemble des **n-cycles** (resp.

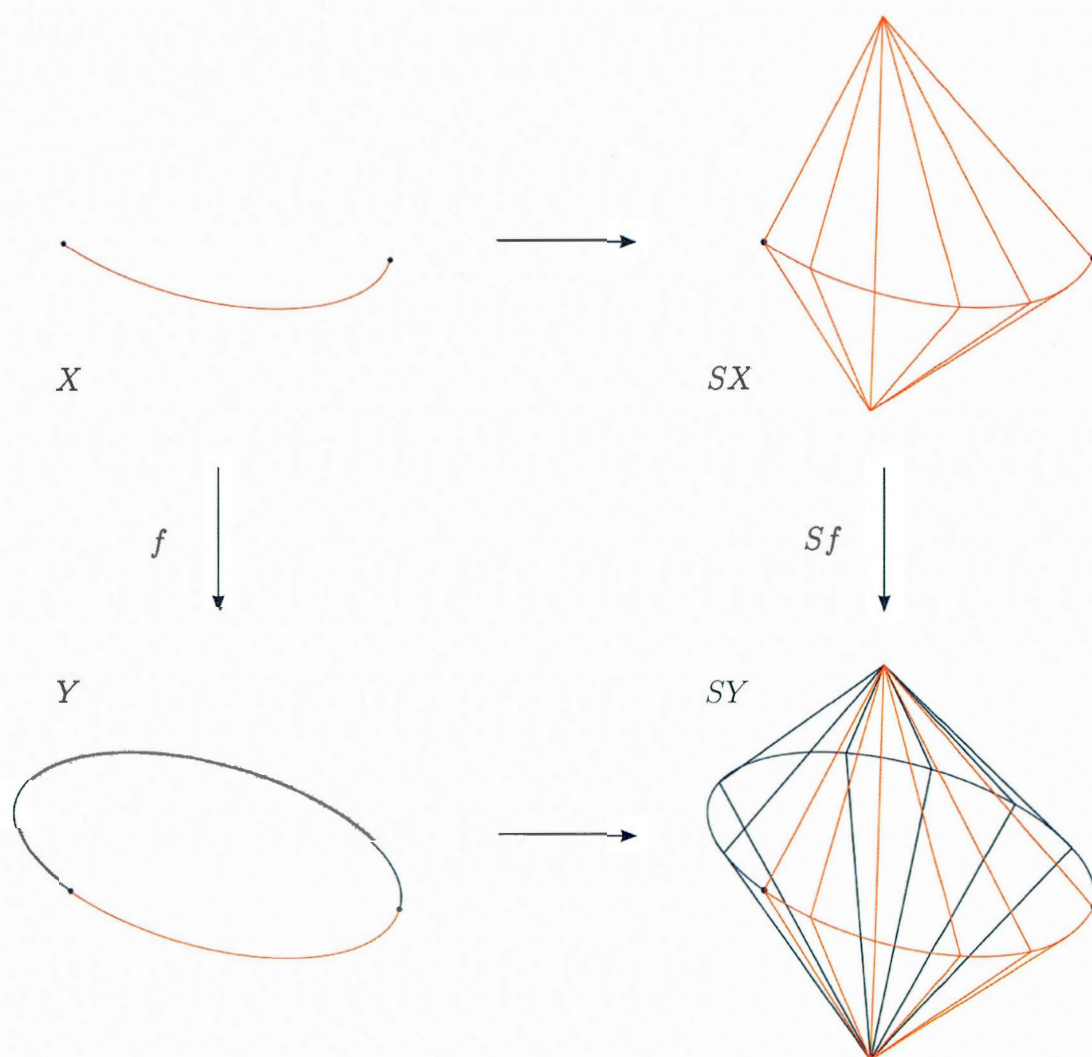


Figure 1.1 Le foncteur de suspension

n-bords) du complexe. L'**homologie** $H_*(C)$ du complexe est la famille d'objets de \mathcal{A} donnée par $H_n(C) = \text{Coker}(B_n \rightarrow Z_n)$.

De manière duale, à partir d'un **complexe de cochaines** $C = (X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec $d^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$, on obtient la **cohomologie** $H^*(C)$ du complexe. On va surtout travailler avec les complexes de cochaines, qui forment une catégorie qu'on va noter $C(\mathcal{A})$.

Notons que tout morphisme de (co)chaines préserve les (co)cycles et les (co)bords, et passe donc en (co)homologie. L'homologie et la cohomologie sont donc naturellement des foncteurs.

Remarque. On pense généralement aux constructions ci-dessus comme si on travaillait dans une catégorie de modules. Cette approche a l'avantage d'être plus concrète, car les objets sont des ensembles et on peut raisonner en termes d'éléments. Dans ce contexte, des monomorphismes (resp. épimorphismes) sont des homomorphismes injectifs (resp. surjectifs), et les termes « noyau », « co-noyau », « image » et « coimage » ont leur sens usuel. En particulier, l'axiome principal des catégories abéliennes n'est que le premier théorème d'isomorphisme.

En présence d'un complexe de chaines, on a alors que la condition $\partial^2 = 0$ signifie que $\text{Im } \partial_{n+1} \subset \text{Ker } \partial_n$, et H_n est simplement le module quotient Z_n/B_n des cycles modulo les bords. Ainsi, par un léger abus de notation, étant donné une suite exacte courte $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ dans une catégorie abélienne, on écrit parfois $Z \cong Y/X$.

En fait, le théorème de Freyd-Mitchell (cf. (Mitchell, 1965)) nous assure que toute catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modules sur un certain anneau. Ainsi, on ne perd essentiellement aucune information en pensant à une catégorie abélienne en termes de modules.

On termine cette section en rappelant deux concepts importants reliés aux complexes de cochaines.

Premièrement, une suite exacte courte $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ dans $C(\mathcal{A})$ induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \xrightarrow{\omega^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(g)} H^n(Z) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(X) \rightarrow \dots;$$

la construction des *homomorphismes de connexion* ω^n et la vérification que la suite est bien exacte est laissée au lecteur (c'est un fait classique ainsi qu'un bon exercice).

Deuxièmement, on rappelle qu'une **homotopie** h entre deux morphismes de cochaines $f, g : (X, d_X) \rightrightarrows (Y, d_Y)$ est une famille d'applications $h_n : X_n \rightarrow Y_{n-1}$ satisfaisant

$$g_n - f_n = h^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ h^n.$$

On dit qu'un morphisme de cochaines est **nullhomotope** s'il est homotope au morphisme nul.

La raison d'être des homotopies est que le foncteur de cohomologie ne sait pas distinguer deux applications qui sont homotopes :

Proposition 1.1.4. *S'il existe une homotopie h entre deux morphismes de cochaines $f, g : (X, d_X) \rightrightarrows (Y, d_Y)$, alors $H^n(f) = H^n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Si on se permet d'utiliser des éléments : soit z un cocycle dans X^n , alors $(g_n - f_n)(z) = d_Y^{n-1}(h^n(z))$, d'où $(g_n - f_n)(z)$ est un cobord dans Y^n ; mais ceci dit exactement que $H^n(f) = H^n(g)$! On peut également s'amuser à concocter une preuve qui utilise purement le langage des catégories abéliennes. \square

1.2 Cônes d'applications et triangles exacts

La notion de cône d'application est très importante en algèbre homologique. On rappelle que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue entre espaces topologiques, on peut construire le **cône de f** , $C(f) = Y \cup_f CX$, en attachant le cône de X

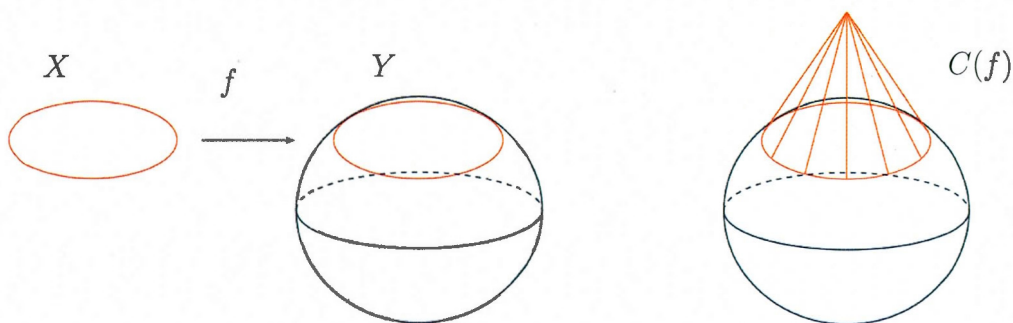


Figure 1.2 Le cône d'application en topologie

(défini par $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$) sur Y le long de f (voir la figure 1.2); on obtient une suite d'applications continues

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} SX \xrightarrow{Sf} SY \rightarrow \dots$$

où S est le foncteur de suspension, i est l'inclusion de Y dans le cône, et p est l'application qui envoie tout Y à un point. Puisque la composition de n'importe quelle paire d'applications successives dans cette suite est nullhomotope, on obtient une suite exacte longue en homologie.

Du point de vue de l'algèbre cette fois, on se place dans une catégorie $C(\mathcal{A})$ de complexes de cochaines. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ on a un **foncteur de décalage** $[k] : C(\mathcal{A}) \rightarrow C(\mathcal{A})$ qui monte le degré par k et altère le signe de la codifférentielle par $(-1)^k$; ce foncteur est l'analogue du foncteur de suspension. Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des complexes de cochaines et $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de chaines, le **cône de f** est le complexe de chaines $C(f) = (X[1] \oplus Y, d)$, où $d(a, b) = (-d_X^{n+1}(a), f^{n+1}(a) + d_Y^n(b))$. Il est facile de voir que

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} X[1] \rightarrow 0$$

est une suite exacte de complexes; on a donc une suite exacte longue

$$\dots \xrightarrow{H^n(f)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(C(f)) \xrightarrow{H^n(p)} H^{n+1}(X) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} \dots$$

Remarque. Ici l'homomorphisme de connexion est exactement $H^n(f)!$

Une suite de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \rightarrow C(f) \rightarrow X[1] \quad (1.2.1)$$

est l'exemple canonique d'un *triangle exact*. Plus généralement, la notion de **triangle** a du sens dans toute catégorie additive munie d'un automorphisme additif (ici le décalage $[1]$ joue ce rôle) : c'est une suite de la forme $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$. Une **catégorie triangulée** est une catégorie munie d'une classe distinguée de triangles, appelés les triangles exacts, qui satisfont certaines propriétés (cf. (Verdier, 1977), qui a introduit cette notion, ou (Gelfand et Manin, 2003)). La catégorie $C(\mathcal{A})$ n'est *pas* une catégorie triangulée puisque, par exemple, il n'est pas vrai que la composition de n'importe quelle paire de morphismes adjacents dans la suite

$$\dots \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow C(f) \rightarrow X[1] \rightarrow Y[1] \rightarrow \dots$$

est nulle, ce qui découle des axiomes d'une catégorie triangulée. Par contre, cette composition est toujours nulhomotope ; ainsi, en considérant plutôt la **catégorie homotopique de complexes de cochaines** $K(\mathcal{A})$, obtenue de $C(\mathcal{A})$ en gardant les mêmes objets mais en identifiant les morphismes de chaines qui sont homotopes, on obtient l'exemple classique d'une catégorie triangulée. Plus précisément : un **morphisme** entre deux triangles $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_0[1]$ et $Y_0 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_0[1]$ dans $K(\mathcal{A})$ est une famille de morphismes $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ qui font en sorte que toutes les compositions commutent (i.e., qui commutent à homotopie près dans $C(\mathcal{A})$) ; on dit alors qu'un triangle est **exact** s'il est isomorphe à un triangle qui a la forme (1.2.1).

Les catégories triangulées ont l'avantage d'être algébriquement malléables, au sens où les axiomes permettent de manipuler directement les triangles exacts assez efficacement. Par exemple, tout morphisme peut être complété en un triangle exact ; tous les triangles exacts peuvent être pivotés tout en préservant leur exacti-

tude ; tout carré commutatif peut être étendu à un morphisme de triangles exacts ; et ainsi de suite.

1.3 A_∞ -algèbres, A_∞ -modules et A_∞ -catégories

Il est instructif de regarder les origines historiques des A_∞ -algèbres pour motiver les définitions subséquentes. Dans les années 60, Stasheff a introduit la notion de A_∞ -*espace* pour étudier une certaine classe d'espaces topologiques admettant une structure de groupe « à homotopie près » (généralisant ainsi les groupes topologiques).

Considérons le foncteur de lacets Ω (défini en (1.1.1)), ainsi qu'un espace pointé $X \in \text{Ob } \text{Top}_*$. On a une opération de composition

$$m_2 : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$$

qui envoie une paire de lacets (f_1, f_2) sur le lacet $m_2(f_1, f_2) = f_1 * f_2$ qui applique f_1 et f_2 successivement, deux fois plus rapidement. Cette opération n'est pas associative : $(f_1 * f_2) * f_3$ n'est évidemment pas *égale*, en tant qu'application, à $f_1 * (f_2 * f_3)$. Cependant, elle est associative à *homotopie près*, puisqu'il est clair qu'on peut trouver une homotopie

$$m_3 : [0, 1] \times (\Omega X)^3 \rightarrow \Omega X$$

reliant le premier lacet au second.

De manière analogue, il y a cinq façons différentes de composer quatre lacets f_1, \dots, f_4 , correspondant aux cinq parenthésages possibles de l'expression

$$f_1 * f_2 * f_3 * f_4.$$

Les lacets obtenus sont reliés par des *chemins* d'homotopies ; deux tels chemins sont eux-mêmes reliés par une homotopie

$$m_4 : [0, 1]^2 \times (\Omega X)^4 \rightarrow \Omega X,$$

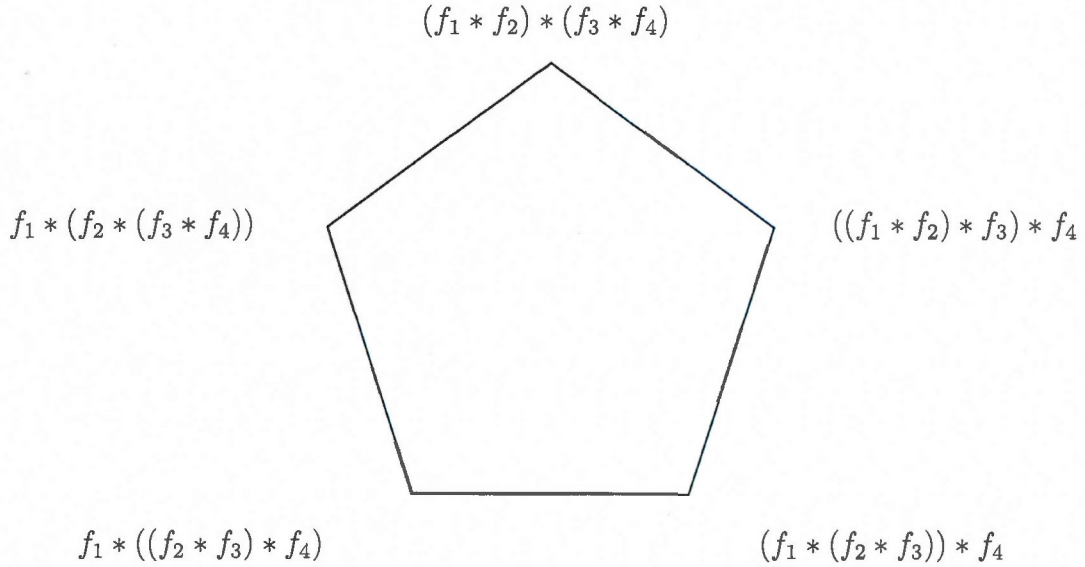


Figure 1.3 L'associaèdre K_2 de Stasheff

et on peut répéter ce processus pour obtenir une infinité d'applications

$$m_n : K_n \times (\Omega X)^n \rightarrow \Omega X.$$

Ici, on voit $K_n \cong [0, 1]^n$ comme l'*associaèdre* de Stasheff. C'est un polytope convexe dont les sommets correspondent aux parenthésages possibles d'un mot de n lettres. Les espaces de lacets, munis de familles d'applications comme ci-dessus, sont les prototypes des A_∞ -espaces. De même, les complexes de chaînes singulières des A_∞ -espaces sont les prototypes des A_∞ -algèbres.

Le reste de ce chapitre suit de très près (Seidel, 2008) ainsi que (Smith, 2014).

Définition. Une A_∞ -catégorie (non unitaire) \mathcal{A} sur un corps \mathbb{K} est la donnée :

- d'un ensemble d'objets $\text{Ob } \mathcal{A}$;
- pour chaque $X_0, X_1 \in \text{Ob } \mathcal{A}$, d'un \mathbb{K} -espace vectoriel gradué $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$;
- pour chaque $k \geq 1$, d'applications de composition \mathbb{K} -linéaires

$$\mu_{\mathcal{A}}^k : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_{k-1}, X_k) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_k)[k-2]$$

de degré $k-2$.

On requiert de plus que applications de composition satisfassent les *équations quadratiques de A_∞ -associativité*

$$\sum_{m,n} (-1)^{\mathfrak{X}_n} \mu_{\mathcal{A}}^{k-m+1}(a_k, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1) = 0, \quad (1.3.1)$$

où $\mathfrak{X}_n = \sum_{j=1}^n |a_j| - n$ et la somme est sur toutes les compositions possibles : $1 \leq m \leq k, 0 \leq n \leq k - m$.

Remarque. Une A_∞ -catégorie n'est donc *pas* une catégorie au sens usuel. L'opération de composition $\mu_{\mathcal{A}}^2$ n'est pas associative, et il n'y a en général pas de morphismes qui jouent le rôle de l'identité.

Il est instructif de considérer les cas $k = 1$ et $k = 2$; on obtient les relations

$$\mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) = 0, \quad (1.3.2)$$

$$\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, \mu_{\mathcal{A}}^1(a_1)) + (-1)^{|a_1|-1} \mu_{\mathcal{A}}^2(\mu_{\mathcal{A}}^1(a_2), a_1) + \mu_{\mathcal{A}}^1(\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)) = 0. \quad (1.3.3)$$

On peut visualiser $\mu_{\mathcal{A}}^k$ comme un arbre à k entrées et une sortie (voir la figure 1.4). Alors, modulo les signes, l'équation de A_∞ -associativité de degré k se visualise comme une somme sur toutes les façons possibles de greffer deux arbres ensemble, de manière à obtenir un arbre à k entrées et une sortie.

L'équation (1.3.2) dit que $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_1, X_0)$, muni de la différentielle $\mu_{\mathcal{A}}^1$, est un complexe de cochaines; l'équation (1.3.3) dit que cette différentielle respecte la règle de Leibniz graduée. Ainsi, en considérant une A_∞ -catégorie à un objet où $\mu^k = 0$ pour $k \geq 3$, on retrouve la notion classique d'*algèbre différentielle graduée*. Plus généralement, une A_∞ -**algèbre** est une A_∞ -catégorie à un objet.

Définition. La **catégorie cohomologique** $H(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est munie des mêmes objets que \mathcal{A} , et des ensembles de morphismes

$$\text{Hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1) = H^*(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu_{\mathcal{A}}^1).$$

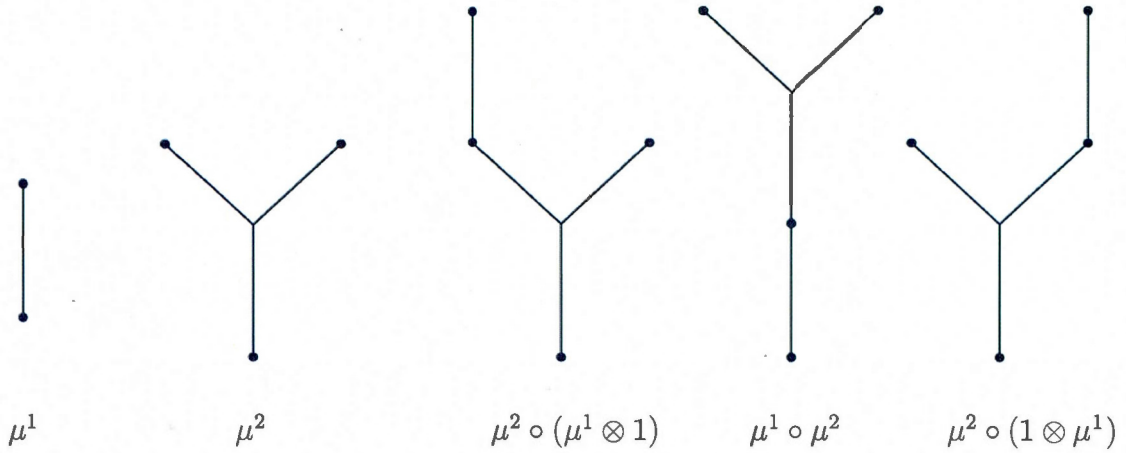


Figure 1.4 Les termes apparaissant dans la relation quadratique d' A_∞ -associativité d'ordre 2

La composition dans cette catégorie est donnée par $[a_2] \cdot [a_1] = [\mu_{\mathcal{A}}^2(a_2, a_1)]$; on vérifie facilement, en utilisant la règle de Leibniz et le fait que a_1, a_2 sont des $\mu_{\mathcal{A}}^1$ -cocycles, que cette opération est bien définie.

Contrairement à \mathcal{A} , la catégorie cohomologique $H(\mathcal{A})$ est presque une catégorie au sens usuel du terme, à part le manque possible de morphismes identité. On a une sous-catégorie $H^0(\mathcal{A})$ obtenue en ne considérant que la cohomologie en degré 0.

Définition. Un A_∞ -foncteur (non unitaire) $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre A_∞ -catégories envoie les objets de \mathcal{A} sur des objets de \mathcal{B} . De plus, un foncteur est muni, pour chaque $k \geq 1$, d'applications \mathbb{K} -linéaires

$$F^k : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_{k-1}, X_k) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FX_0, FX_k)[k-1]$$

satisfaisant des relations d' A_∞ -associativité de la forme

$$\sum_r \sum_{s_1, \dots, s_r} \mu_{\mathcal{B}}^r(F^{s_r}(a_k, \dots, a_{k-s_r+1}), \dots, F^{s_1}(a_{s_1}, \dots, a_1)) = \sum_{m,n} (-1)^{\mathbf{x}_n} F^{k-m+1}(a_k, \dots, a_{n+m+1}, \mu_{\mathcal{A}}^m(a_{n+m}, \dots, a_{n+1}), a_n, \dots, a_1).$$

La somme du haut est sur tous les $r \geq 1$ et les partitions $s_1 + \dots + s_r = k$, $s_i \geq 1$, et la somme du bas est comme pour les relations quadratiques dans la définition d'une A_∞ -catégorie.

Bien que ces relations semblent assez compliquées, on obtient au moins pour $k = 1$ l'expression

$$\mu_{\mathcal{B}}^1 \circ F^1 = F^1 \circ \mu_{\mathcal{A}}^1,$$

qui dit simplement que F^1 est un morphisme de chaînes.

Un A_∞ -foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induit un foncteur (non unitaire) $H(F) : H(\mathcal{A}) \rightarrow H(\mathcal{B})$ entre les catégories de cohomologie : il ne fait rien sur les objets, et envoie $[a] \in \text{Hom}_{H(\mathcal{A})}(X_0, X_1)$ sur $[F^1(a)]$.

Définition. On dit qu'un A_∞ -foncteur F est un **quasi-isomorphisme** si le foncteur induit $H(F)$ est un isomorphisme de catégories. Notons qu'on n'a pas besoin de morphismes identité pour qu'un isomorphisme de catégories ait du sens.

On va maintenant définir la notion d' A_∞ -module sur une A_∞ -catégorie fixée. Pour cela, on note d'abord que l'ensemble de tous les A_∞ -foncteurs entre deux A_∞ -catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} forme lui-même une A_∞ -catégorie, généralement notée $\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dans la littérature (*non-unital functors*). Pour ce qui nous concerne, la structure précise de cette A_∞ -catégorie importe peu.

On rappelle aussi que l'ensemble $\mathfrak{C} = C(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$ des complexes de cochaînes sur la catégorie abélienne $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ des \mathbb{K} -espaces vectoriels forme une catégorie différentielle graduée (voir e.g. (Bertrand, 2011) pour la définition exacte ; une telle catégorie généralise la notion d'algèbre différentielle graduée pour inclure plus qu'un objet) : si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des complexes, le complexe $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, en degré n , est donné par l'ensemble des applications \mathbb{K} -linéaires $X \rightarrow Y$ de degré n ; la codifférentielle, elle, est donnée par $d_{\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)}(f) = d_Y \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_X$. On peut voir n'importe quelle catégorie différentielle graduée comme une A_∞ -

catégorie en prenant $\mu^1 =$ la codifférentielle, $\mu^2 =$ la composition et $\mu^k = 0$ pour $k \geq 3$.

Remarque. Il est intéressant de remarquer que les cocycles du complexe $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ sont exactement les morphismes de chaines, et que les cobords sont exactement les applications nullhomotopes. La catégorie cohomologique $H(\mathfrak{C})$ est donc exactement la catégorie homotopique de complexes de cochaines $K(\text{Vect}_{\mathbb{K}})$.

Définition. Un A_{∞} -module \mathcal{M} sur une A_{∞} -catégorie \mathcal{A} est un objet $\mathcal{M} \in \text{Ob}(\text{nu-fun}(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathfrak{C}))$; autrement dit, c'est un A_{∞} -foncteur $\mathcal{M} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{C}$, où \mathfrak{C} est la catégorie différentielle graduée des complexes de cochaines (qui est en particulier une A_{∞} -catégorie avec $\mu_{\mathfrak{C}}^k = 0$ pour $k \geq 3$).

Donc, par définition, un A_{∞} -module \mathcal{M} envoie tout objet $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$ sur un complexe de cochaines $\mathcal{M}X$. De plus, \mathcal{M} vient avec des opérations \mathbb{K} -linéaires

$$\mu_{\mathcal{M}}^k : \mathcal{M}X_{k-1} \otimes \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_{k-2}, X_{k-1}) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \mathcal{M}X_0[k-2]$$

satisfaisant des A_{∞} -relations adéquates.

Remarque. Ici, on a identifié une application \mathbb{K} -linéaire de la forme $X \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$ avec une application \mathbb{K} -linéaire $X \otimes Y \rightarrow Z$ via l'adjonction hom-tenseur pour les complexes de cochaines.

On obtient ainsi une nouvelle A_{∞} -catégorie $\text{nu-mod}(\mathcal{A})$ composée de tous les A_{∞} -modules sur \mathcal{A} .

En théorie des catégories ordinaires, il existe un foncteur important appelé le **plongement de Yoneda**, qui permet d'identifier toute catégorie \mathcal{C} à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Ens}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ des *préfaisceaux* sur \mathcal{C} , c'est-à-dire des foncteurs contravariants de \mathcal{C} vers Ens . Par définition, ce foncteur envoie $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ sur le préfaisceau représentable $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$. Dans le monde A_{∞} , l'analogue du plongement de Yoneda est un A_{∞} -foncteur \mathcal{Y} qui identifie toute A_{∞} -catégorie \mathcal{A}

à une sous- A_∞ -catégorie de $\text{nu-mod}(\mathcal{A})$. Il est défini sur les objets par $\mathcal{Y}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, X)$.

Finalement, on mentionne qu'il existe un analogue des catégories triangulées pour les A_∞ -catégories. Une façon d'ajouter des cônes d'applications à une A_∞ -catégorie quelconque est de la plonger, via Yoneda, dans la catégorie des A_∞ -modules, où les cônes d'applications existent toujours. Une approche plus concrète, dont on parlera au dernier chapitre, est d'utiliser la notion de *complexe tordu*.

CHAPITRE II

TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE

Dans cette section, toutes les variétés et applications entre celles-ci sont supposées lisses, à moins d'avis contraire.

2.1 Un peu d'histoire

Les fondements historiques de la géométrie symplectique remontent à la mécanique classique ; plus précisément, à des systèmes tels des configurations orbitales de planètes ou des pendules qui oscillent. Étant donné un tel système dans \mathbb{R}^n , on peut lui associer à chaque instant des *coordonnées canoniques*

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

notamment la position $y \in \mathbb{R}^n$ au temps donné ainsi que la quantité de mouvement $x \in \mathbb{R}^n$. Plus précisément, à partir du lagrangien

$$L(y, \dot{y}) = \text{énergie cinétique} - \text{énergie potentielle}$$

du système en cet instant, on obtient la quantité de mouvement via

$$x_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}.$$

Le principe d'incertitude d'Heisenberg dit essentiellement qu'il est impossible de connaître simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule ; cependant, il est possible de mesurer « l'enchevêtrement » de ces deux variables

dans une surface $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ via l'aire symplectique $\omega(S)$:

$$\omega(S) = \text{aire}_1(S) + \cdots + \text{aire}_n(S),$$

où $\text{aire}_i(S)$ signifie l'aire de la projection de S dans le plan x_i, y_i . Cette mesure est particulièrement utile puisqu'elle ne dépend pas du temps qui passe. On remarque que $\omega(S)$ n'est autre que l'intégrale sur S de la 2-forme différentielle

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n. \quad (2.1.1)$$

Ceci motive les définitions qui suivent.

2.2 Notions élémentaires de topologie symplectique

Soit M^{2n} une variété lisse de dimension paire. Une **forme symplectique** ω sur M est une 2-forme fermée (i.e. $d\omega = 0$) et non dégénérée sur M . La non-dégénérescence signifie que, en chaque point $p \in M$, le seul vecteur $v \in T_p M$ satisfaisant $\omega_p(v, w) = 0$ pour tout $w \in T_p M$ est le vecteur nul $v = 0$. Ainsi

$$\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

est une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée en tout point $p \in M$. Ces conditions entraînent que ω^n est une forme volume sur M , et donc que M est orientable. On écrit (M, ω) pour décrire la **variété symplectique** ainsi obtenue.

Remarque. On peut interpréter géométriquement les conditions sur ω de la façon suivante. Le fait que ω est fermée signifie que l'aire symplectique (mesurée par ω) d'une surface à bord S ne change pas si on perturbe S en fixant son bord. La non-dégénérescence signifie que pour tout vecteur tangent non nul v , il existe un autre vecteur tangent w (au même point) tel que l'aire d'un parallélogramme engendré par v, w est non nulle.

Définition. Un difféomorphisme $\phi : (M, \omega) \rightarrow (N, \omega')$ entre deux variétés symplectiques est un **symplectomorphisme** si

$$\phi^* \omega' = \omega,$$

i.e., $\omega_p(v, w) = \omega'_{f(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(w))$ pour tous $v, w \in T_p M$.

Une des caractéristiques les plus frappantes de la géométrie symplectique est que, contrairement à géométrie riemannienne – où des phénomènes locaux peuvent distinguer des métriques sur une variété – il n'existe aucun invariant local qui permette de distinguer deux formes symplectiques :

Théorème 2.2.1 (Darboux). *Autour de n'importe quel point d'une variété symplectique, on peut trouver un voisinage ouvert U et des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tels que, sur U , la forme symplectique soit donnée par la formule (2.1.1).*

Autrement dit, toute variété symplectique est localement symplectomorphe à \mathbb{R}^{2n} avec sa structure standard ω_0 .

On donne un aperçu rapide de la preuve, qui repose sur un argument classique de géométrie symplectique appelé l'*argument de Moser*. On a besoin du lemme de géométrie différentielle suivant (cf. (Aebischer et al., 1994)) : étant donné une famille $\phi_t : M \rightarrow M$ ($t \in [0, 1]$) de difféomorphismes avec $\phi_0 = Id_M$, ainsi qu'une famille de k -formes $\omega_t \in \Omega^k(M)$, alors

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_t = \phi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t + \frac{d\omega_t}{dt} \right),$$

où

$$X_t = \frac{d\phi_t}{dt} \circ \phi_t^{-1} \quad (2.2.1)$$

est le champ de vecteurs dépendant du temps associé à ϕ_t .

Théorème 2.2.2 (Argument de Moser). *Soit M une variété compacte munie de deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 qui sont cohomologues. Supposons que la 2-forme*

$$\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$$

est symplectique pour tout $t \in [0, 1]$. Alors il existe une famille de difféomorphismes $\phi_t : M \rightarrow M$ avec $\phi_0 = Id_M$ telle que $\phi_t^ \omega_t = \omega_0$.*

En particulier, (M, ω_0) est symplectomorphe à (M, ω_1) .

Démonstration. Par hypothèse, on a

$$\left[\frac{d\omega_t}{dt} \right] = [\omega_1 - \omega_0] = 0 \in H_{dR}^2(M);$$

il existe donc $\eta_t \in \Omega^1(M)$ telle que

$$\frac{d\omega_t}{dt} = d\eta_t.$$

(Notons que la théorie de Hodge permet de choisir η_t systématiquement de sorte qu'elle soit automatiquement *lisse* en t .) De plus, puisque ω_t est non dégénérée, on peut trouver un unique champ de vecteurs dépendant du temps X_t satisfaisant $\iota_{X_t}\omega_t = -\eta_t$.

Soit $\phi_t : M \rightarrow M$ une famille de difféomorphismes satisfaisant $\phi_0 = Id_M$ et la relation (2.2.1) (une telle famille existe toujours; pour s'en convaincre, il suffit de constater qu'on peut voir un champ de vecteurs dépendant du temps comme un champ de vecteurs ordinaire sur $[0, 1] \times M$, puis de considérer son flot; celui-ci aura la forme $\Phi^t(s, m) = (t + s, \varphi^t(s, m))$, et $\phi_t(m) = \varphi^t(0, m)$ fait l'affaire). Notons qu'on utilise ici la compacité de M .

Finalement, en utilisant la formule magique de Cartan et le fait que ω_t est fermée, on obtient

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t = \phi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \phi_t^*\frac{d\omega_t}{dt} = \phi_t^*d\iota_{X_t}\omega_t + \phi_t^*\frac{d\omega_t}{dt} = -\phi_t^*d\eta_t + \phi_t^*d\eta_t = 0,$$

d'où $\phi_t^*\omega_t$ ne dépend pas de t et donc $\phi_t^*\omega_t = \phi_0^*\omega_0 = \omega_0$ pour tout $t \in [0, 1]$. \square

Il existe une version linéaire du théorème de Darboux qu'on va utiliser dans la preuve et démontrer plus tard : c'est le théorème 2.3.1 de la section suivante.

Démonstration du théorème de Darboux. Soit $p \in M$. Par la version linéaire du théorème, on peut choisir une carte (U, x_i, y_i) autour de p pour laquelle

$$\omega_p = \sum (dx_i)_p \wedge (dy_i)_p$$

(en ce point seulement, pas nécessairement sur tout U).

On considère donc la 2-forme $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$ sur U , et on prend $\omega_1 = \omega$. Comme dans l'argument de Moser, on considère $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega_0$. Puisque ω_t est non dégénérée en p , on peut rapetisser U à un voisinage contractile de p sur lequel ω_t est non dégénérée pour tout $t \in [0, 1]$. Sur ce nouveau U , ω_t est donc toujours une forme symplectique.

Maintenant, puisque U est contractile et que $d(\omega_1 - \omega_0) = 0$, le lemme de Poincaré nous garantit l'existence d'une 1-forme $\eta \in \Omega^1(U)$ telle que $\omega_1 - \omega_0 = d\eta$. Quitte à soustraire une 1-forme à coefficients constants, on peut supposer que $\eta_p = 0$. Mais alors le champ de vecteurs dépendant du temps X_t défini par $\iota_{X_t}\omega_t = -\eta$ satisfait $X_t(p) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Dans ce cas, même en absence de compacité de M , le théorème d'existence locale des équations différentielles ordinaires nous garantit que la famille de difféomorphismes $\phi_t : U \rightarrow U$ obtenue à partir de X_t existe pour tout $t \in [0, 1]$, quitte à rapetisser encore U .

Le reste de l'argument de Moser s'applique alors et achève la preuve. \square

Définition. Une sous-variété L^n dans (M^{2n}, ω) est dite **lagrangienne** si elle est isotrope, i.e., $\omega|_L \equiv 0$.

Remarque. Il faut bien remarquer qu'on requiert que la dimension de L soit la moitié de celle de M . Par l'algèbre linéaire, une sous-variété lagrangienne est précisément une sous-variété isotrope de dimension maximale. En effet, considérons la restriction de la forme symplectique à un point $p \in L$; alors ω_p est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur $T_p M$. La non-dégénérescence de ω nous donne un isomorphisme $T_p M \rightarrow T_p^* M$ via $v \mapsto \omega(v, -)$; sous cet isomorphisme, le **complément symplectique**

$$(T_p L)^\omega = \{v \in T_p M \mid \omega(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_p L\} \quad (2.2.2)$$

est identifié à l'annulateur $(T_p L)^0$ de $T_p L$ dans $T_p^* M$. Ainsi la relation $T_p L \subset$

$(T_p L)^\omega$ entraîne que

$$\dim T_p L \leq \dim (T_p L)^\omega = \dim (T_p L)^0 = \dim T_p M - \dim T_p L,$$

d'où $2 \dim T_p L \leq \dim T_p M$. Si cette inégalité était stricte, on pourrait trouver un vecteur non nul $v \in (T_p L)^\omega \setminus T_p L$; mais alors $T_p L \oplus \mathbb{R}v$ serait isotrope et contiendrait $T_p L$, ce qui contredit la maximalité. Ainsi $\dim T_p L = n$.

Voici maintenant quelques exemples de variétés symplectiques et de sous-variétés lagrangiennes :

Exemples.

1. Toute courbe lisse plongée dans $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ est trivialement lagrangienne, puisque n'importe quels deux vecteurs dans son espace tangent sont linéairement dépendants.
2. Si (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) sont deux variétés symplectiques, alors leur produit $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$ est également symplectique (par définition $\omega_1 \oplus \omega_2 = \pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$, où les $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ sont les projections canoniques).
3. Comme on l'a vu dans le théorème de Darboux, l'exemple essentiel d'une variété symplectique est \mathbb{R}^{2n} avec la forme standard ω_0 décrite en (2.1.1). On peut aussi voir \mathbb{R}^{2n} comme le produit de $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ avec lui-même pris n fois. De ce point de vue, le n -tore $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$, naturellement plongé dans $(\mathbb{R}^2)^n$, est lagrangien (puisque chaque $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ est lagrangien et que le produit de sous-variétés lagrangiennes est lagrangien).
4. Toute sous-variété complexe de $\mathbb{C}P^n$ hérite d'une forme symplectique par restriction de la forme de Fubini-Study. En effet, en travaillant en coordonnées locales complexes, il n'est pas difficile de voir que la forme ainsi obtenue est non dégénérée.
5. La classe la plus importante de variétés symplectiques est celle des fibrés cotangents de variétés lisses. Soit M^n une variété lisse quelconque. On peut

toujours munir l'espace total de son fibré cotangent $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ d'une 1-forme canonique θ de la manière suivante. On veut associer à tout $\xi = (p, \xi_p) \in T^*M$ une application $\theta_\xi : T_\xi(T^*M) \rightarrow \mathbb{R}$; la composition

$$T_\xi(T^*M) \xrightarrow{T_\xi\pi} T_pM \xrightarrow{\xi_p} \mathbb{R}$$

de la dérivée en ξ de la projection canonique π avec le covecteur ξ_p donne l'application voulue. Autrement dit, $\theta_\xi = \pi_\xi^*(\xi_p)$.

Maintenant, on affirme que la 2-forme $\omega_M^* = -d\theta$ est symplectique. Elle est exacte, donc fermée. La non-dégénérescence étant une propriété locale, fixons des coordonnées locales (x_i) sur M . Rappelons qu'on a des coordonnées locales induites sur T^*M : si les coordonnées de $p \in M$ sont (x_1, \dots, x_n) , alors les coordonnées de $\xi = (p, \xi_p) \in T^*M$ sont $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, où $\xi_p = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$.

En coordonnées locales, l'expression de θ est

$$\theta = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$$

(essentiellement la même que celle de ξ_p). Alors l'expression locale de ω_M^* est

$$\omega_M^* = -d\theta = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Puisque cette forme correspond exactement – sous le difféomorphisme entre les ouverts respectifs de T^*M et \mathbb{R}^{2n} donné par la carte ci-dessus – à la forme standard ω_0 sur \mathbb{R}^{2n} , il s'ensuit que ω_M^* est également non dégénérée.

La section nulle ainsi que les fibres du fibré cotangent sont des exemples importants de sous-variétés lagrangiennes de (T^*M, ω_M^*) .

Comme on va le voir, la catégorie de Fukaya de (M, ω) est une façon d'organiser les intersections des sous-variétés lagrangiennes de M . On pourrait se questionner sur l'origine de cet engouement envers les sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique. Déjà au début des années 80, Weinstein avait pour devise

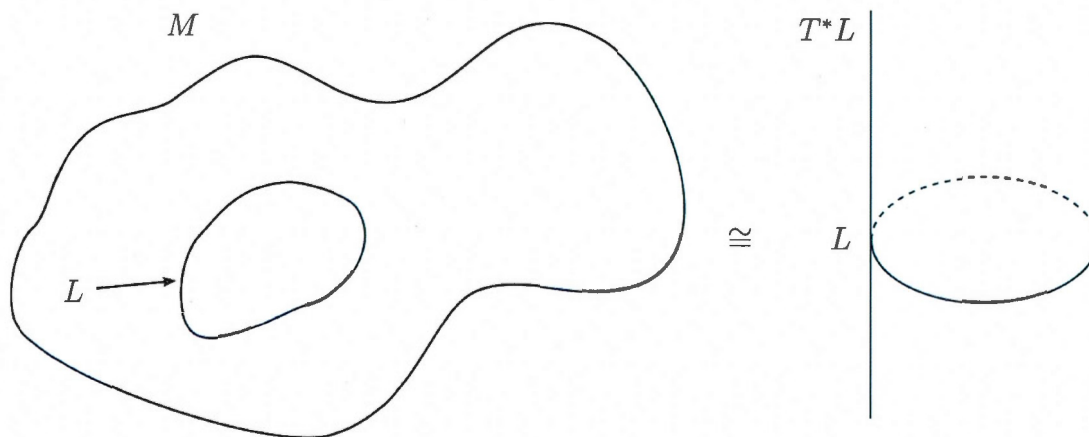


Figure 2.1 Le théorème des voisinages tubulaires de Weinstein

« Tout est une sous-variété lagrangienne ! » (Weinstein, 1981)

Il n'avait pas tort, puisque toute variété M (pas nécessairement symplectique) peut être vue comme la section nulle de son fibré cotangent (T^*M, ω_M^*) . En particulier, si $L \subset (M, \omega)$ est une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique, on peut aussi la voir comme une sous-variété lagrangienne de (T^*L, ω_L^*) . Le théorème des voisinages tubulaires de Weinstein affirme que, si L est compact, alors ces deux plongements de L dans des variétés symplectiques sont les mêmes, à symplectomorphisme local près :

Théorème 2.2.3. *Soit $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne compacte, et identifions L à la section nulle de (T^*L, ω_L^*) . Alors il existe des voisinages U de L dans M et U^* de L dans T^*L et un symplectomorphisme $\phi : U \rightarrow U^*$ qui commute avec les inclusions de L dans les deux voisinages.*

La preuve (voir (Weinstein, 1971) ou (Da Silva, 2001)) utilise encore l'argument de Moser.

Les intersections de sous-variétés lagrangiennes, quant à elles, apparaissent déjà dans le cadre de la mécanique classique dont on a discuté au début du chapitre. Supposons que l'espace des configurations possibles d'un système soit modelé sur

une variété M . Alors, comme auparavant, le fibré cotangent T^*M représente l'espace des phases (i.e., la position plus la quantité de mouvement) du système. L'énergie du système est décrite par une fonction $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, appelée la **fonction hamiltonienne**. Cette fonction détermine un unique champ de vecteurs X_H sur T^*M , le **champ de vecteurs hamiltonien** de H , via la condition

$$dH(-) = \omega(X_H, -).$$

Le flot de ce champ de vecteurs décrit l'évolution du système.

Une question naturelle se pose alors : étant donné deux configurations du système, i.e., deux points $p, q \in M$, est-il possible d'attribuer une quantité de mouvement à p de manière à ce que p se déplace jusqu'à q après exactement une unité de temps ? Dans notre cadre, le problème se reformule ainsi : sous l'action du flot au temps 1 de X_H , est-ce que l'image de T_p^*M intersecte T_q^*M ? Comme on l'a dit ci-haut, les fibres T_p^*M et T_q^*M sont des sous-variétés lagrangiennes de T^*M . Mais puisque X_H préserve la forme symplectique, l'image de T_p^*M demeure une sous-variété lagrangienne sous l'action du flot. Ainsi, ce problème de mécanique classique se réduit à un problème de calcul d'intersections de sous-variétés lagrangiennes dans l'espace des phases T^*M .

2.3 La théorie linéaire

Par le théorème de Darboux, la théorie locale des variétés symplectiques se réduit au cas linéaire, i.e., à la l'étude de l'espace $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Ce cas étant d'intérêt particulier, on va regarder de plus près la version linéaire du théorème de Darboux.

Définition. Un **espace vectoriel symplectique** (V, ω) est un espace vectoriel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée ω . Un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est dit **symplectique** si $W \cap W^\omega = \{0\}$ (cf. (2.2.2)) ; de manière équivalente, ω se restreint à une forme non dégénérée $\omega|_W$ sur W . Dans ce cas, $(W, \omega|_W)$ est en soi un espace vectoriel symplectique.

Remarque. La dimension de V est alors forcément paire, puisque toute matrice réelle antisymétrique de dimension impaire doit avoir un noyau (il suffit de considérer ses valeurs propres, qui viennent en paires $\pm\lambda$).

Définition. Un **symplectomorphisme linéaire** de (V, ω) à (W, ω') est un isomorphisme linéaire $\phi : V \rightarrow W$ qui préserve la forme symplectique, i.e., tel que

$$\omega'(\phi(v), \phi(w)) = \omega(v, w) \quad \forall v, w \in V.$$

On note le groupe de tous les symplectomorphismes linéaires de (V, ω) à lui-même par $\text{Sp}(V)$.

Remarque. Dans le cas où $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, on note $\text{Sp}(V) = \text{Sp}(2n)$. Comme le suggère la notation, par rapport à la base standard de \mathbb{R}^{2n} , on retrouve le groupe de Lie classique $\text{Sp}(2n) \subset \text{SL}(2n, \mathbb{R})$ de toutes les **matrices symplectiques** A , i.e., satisfaisant

$$A^T J_0 A = J_0,$$

où

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, on a $\omega_0(v, w) = \langle J_0 v, w \rangle = -v^T J_0 w$.

Définition. Une base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ de (V, ω) est appelée une **base symplectique** si

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0, \quad \omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Théorème 2.3.1. *Tout espace vectoriel symplectique (V, ω) admet une base symplectique $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$. De plus, une telle base nous fournit un symplectomorphisme linéaire $\phi : (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \rightarrow (V, \omega)$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n . Puisque ω est non dégénérée, on peut trouver $u_1, v_1 \in V$ linéairement indépendants tels que

$$\omega(u_1, v_1) = 1.$$

Mais alors $\langle u_1, v_1 \rangle$ est symplectique : si $w \in \langle u_1, v_1 \rangle \cap \langle u_1, v_1 \rangle^\omega$, disons $w = au_1 + bv_1$, alors

$$a = \omega(w, v_1) = 0, \quad b = \omega(u_1, w) = 0,$$

d'où $w = 0$ tel que voulu. Puisque

$$\langle u_1, v_1 \rangle^\omega \cap (\langle u_1, v_1 \rangle^\omega)^\omega = \langle u_1, v_1 \rangle^\omega \cap \langle u_1, v_1 \rangle = \{0\},$$

on a alors que $\langle u_1, v_1 \rangle^\omega$ est un sous-espace symplectique de V de dimension $2(n-1)$. En appliquant la récurrence, on obtient une base symplectique $(u_2, \dots, u_n, v_2, \dots, v_n)$ pour $\langle u_1, v_1 \rangle^\omega$ et donc la base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ de V voulue.

Finalement, le symplectomorphisme linéaire ϕ est donné par

$$\phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n (x_i u_i + y_i v_i).$$

□

Proposition 2.3.2. *Soit $L \subset (V, \omega)$ un sous-espace lagrangien dans un espace vectoriel symplectique. Alors toute base (u_1, \dots, u_n) de L s'étend à une base symplectique $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ de V .*

Démonstration. Par la proposition précédente, on peut se ramener sans perte de généralité au cas où $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Dans ce cadre, le sous-espace lagrangien $L' = J_0 L$ intersecte L transversalement (i.e., trivialement), d'où la forme bilinéaire $L \times L' \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par la restriction de ω_0 est non dégénérée. On obtient donc un isomorphisme $\Phi : L^* \rightarrow L'$; on pose $v_i = \Phi(u_i^*)$, où (u_i^*) est la base duale de (u_i) . On a alors que $\omega_0(u_i, u_j) = \omega_0(v_i, v_j) = 0$ car L, L' sont lagrangiens, et par construction

$$\omega_0(u_i, v_j) = \omega_0(u_i, \Phi(u_j^*)) = u_j^*(u_i) = \delta_{ij}.$$

□

La preuve de la proposition précédente a une application importante. Soient L, L' deux sous-espaces lagrangiens qui s'intersectent transversalement dans un espace vectoriel symplectique (V, ω) . Par l'argument ci-dessus, étant donné une base (u_1, \dots, u_n) de L , on peut trouver une base complémentaire (v_1, \dots, v_n) de $L' \cong L^*$ ainsi qu'un symplectomorphisme envoyant $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ sur la base standard de \mathbb{R}^{2n} . On obtient donc le

Corollaire 2.3.3. *Soient (V_i, ω_i) , $i = 1, 2$ deux espaces vectoriels symplectiques, et soient $L_i, L'_i \subset V_i$ deux paires de sous-espaces lagrangiens qui s'intersectent transversalement dans leurs espaces respectifs. Alors il existe un symplectomorphisme linéaire $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ tel que $\phi(L_1) = L_2$ et $\phi(L'_1) = L'_2$.*

Les interactions entre les aspects de géométrie riemannienne, symplectique et complexe, qui vont apparaître un peu plus tard en termes d'une structure presque complexe compatible avec la forme symplectique, se manifestent dans le prochain résultat :

Proposition 2.3.4. *On a l'égalité de groupes matriciels*

$$\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n).$$

Démonstration. On remarque qu'une matrice réelle A de taille $2n \times 2n$ satisfait :

$$A \in \mathrm{Sp}(2n) \iff A^T J_0 A = J_0 \quad (2.3.1)$$

$$A \in \mathrm{O}(2n) \iff A^T A = I_{2n}$$

$$A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \iff A J_0 = J_0 A.$$

De plus, on vérifie aisément que n'importe quelle paire de ces conditions entraîne la troisième. Il reste donc à vérifier, par exemple, que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n)$. Notons qu'ici on identifie $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ comme sous-groupes de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ via

$$A = X + iY \leftrightarrow \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}).$$

Mais un calcul simple en utilisant (2.3.1) montre qu'une matrice $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ qui a la forme ci-dessus satisfait

$$A \in \text{Sp}(2n) \iff XY^T = X^TY, \quad X^TX + Y^TY = I_n,$$

ce qui arrive exactement quand $A = X + iY$ est dans $\text{U}(n)$ (pour se convaincre de ceci il suffit de développer l'identité $\langle z, w \rangle = \langle Az, Aw \rangle$, où \langle, \rangle est le produit scalaire hermitien usuel). \square

CHAPITRE III

LA CATÉGORIE DE FUKAYA

3.1 Courbes J -holomorphes et espaces de modules

Définition. Une **métrique riemannienne** g sur une variété M est la donnée, en chaque point $p \in M$, d'un produit scalaire $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ qui varie de manière lisse avec p . Autrement dit, c'est une section du fibré $T^*M \otimes T^*M$ qui est symétrique et définie positive en chaque point.

Définition. Une **structure presque complexe** J sur une variété M est la donnée, en chaque point $p \in M$, d'un endomorphisme $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ satisfaisant $J_p^2 = -1$ et qui varie de manière lisse avec p . En d'autres termes, c'est une section de $\text{Erd}(TM) \cong T^*M \otimes TM$ vérifiant la condition précédente.

Ainsi, une structure presque complexe nous permet de « multiplier par i » les vecteurs tangents de M .

Définition. Soit (M, ω) une variété symplectique. On dit que la structure presque complexe J est **compatible** avec ω si, pour tout $p \in M$, on a

1. $\omega_p(v, J_p v) > 0$ pour tout $v \in T_p M \setminus \{0\}$;
2. $\omega_p(J_p v, J_p w) = \omega_p(v, w)$ pour tous $v, w \in T_p M$.

Dans ce cas, l'application $g_J : p \mapsto \omega_p(-, J-)$ donne une métrique riemannienne sur M . On va parfois écrire (M, ω, J) pour mettre l'emphasis qu'une structure presque complexe J compatible avec (M, ω) a été imposée.

L'intérêt de se donner une structure presque complexe compatible sur une variété symplectique est d'éventuellement pouvoir définir la notion de *courbe pseudoholomorphe* sur celle-ci. L'introduction de ces courbes par Gromov dans les années 80 a révolutionné l'étude des variétés symplectiques. Le résultat fondamental concernant les structures presque complexes compatibles est le suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors l'espace des structures presque complexes sur M compatibles avec ω est non vide et contractile.*

Idée de démonstration. L'approche utilisée dans (Audin et Lafontaine, 1994) pour démontrer ce théorème est de construire un fibré $\mathcal{J}_c(TM) \rightarrow M$ dont la fibre au-dessus de $p \in M$ consiste en l'ensemble des structures complexes linéaires sur $T_p M$ qui sont compatibles avec ω_p . Par la version linéaire du théorème de Darboux, chaque fibre peut être identifiée à l'ensemble $\mathcal{J}_c(\omega)$ des structures complexes linéaires sur \mathbb{R}^{2n} qui sont compatibles avec la forme standard ω_0 . Il y a une action transitive de $\mathrm{Sp}(2n)$ sur $\mathcal{J}_c(\omega)$ donnée par $A \cdot J = AJA^{-1}$, dont le stabilisateur est exactement $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n)$ (voir la Proposition 2.3.4). On a donc une structure d'espace homogène induite sur $\mathcal{J}_c(\omega) \cong \mathrm{Sp}(2n)/\mathrm{U}(n)$.

La clé de la démonstration est alors de voir que l'application $J \mapsto (J + J_0)^{-1} \circ (J - J_0)$ est un difféomorphisme entre $\mathcal{J}_c(\omega)$ et la boule unité ouverte dans l'espace vectoriel des matrices symétriques S qui satisfont $SJ_0 + J_0S = 0$. Une fois ceci fait, on remarque que l'espace des structures presque complexes sur M compatibles avec ω n'est autre que l'espace des sections du fibré $\mathcal{J}_c(TM) \rightarrow M$, qui est contractile car toutes les fibres le sont. \square

Définition. Soit M une variété munie d'une structure presque complexe J . Soit Σ une surface de Riemann avec structure presque complexe j . Une **courbe pseudo-holomorphe** (ou **courbe J -holomorphe**) sur M est une application $u : \Sigma \rightarrow M$ qui satisfait l'équation de Cauchy-Riemann

$$J \circ du = du \circ j.$$

Remarque. Il est parfois utile de considérer le cas plus général où Σ est une surface à bord. Notamment, le cas où $\Sigma = B = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{C}$ est une « bande pseudoholomorphe » (avec structure presque complexe donnée par la multiplication par i) est celui qui va surtout nous intéresser. Si on fixe des coordonnées usuelles (s, t) sur B , la condition de Cauchy-Riemann se réduit à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (3.1.1)$$

De manière intuitive, on appelle **espace de modules** un espace topologique ou une variété qui paramétrise certains objets géométriques. Par exemple, $\mathbb{R}P^1$ est un espace de modules pour l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 . Un autre exemple est donné par les coniques du plan affine. Chaque conique est uniquement représentée par un polynôme de la forme $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$, modulo multiplication par un scalaire non nul. Ainsi, on a un espace de modules $\mathbb{R}^6/\mathbb{R}^* = \mathbb{R}P^5$ qui paramétrise toutes les coniques du plan affine. De plus, la condition géométrique « la conique passe par le point (x_0, y_0) » correspond à l'équation linéaire

$$Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0,$$

qui définit un hyperplan projectif dans $\mathbb{R}P^5$. On peut utiliser ce fait pour démontrer qu'étant donné cinq points en position générale dans le plan, il existe une unique conique passant par ces cinq points; en effet, cinq hyperplans en position générale dans un espace de dimension cinq s'intersectent en un seul point! Cet exemple illustre une technique puissante utilisée dans de nombreuses branches modernes des mathématiques : pour compter certaines classes d'objets, on peut paramétriser ces objets par des espaces de modules, traduire les conditions imposées sur nos objets en des sous-variétés de nos espaces de modules, puis intersecter ces sous-variétés et compter le nombre de composantes de dimension 0.

Fixons deux sous-variétés lagrangiennes L_0, L_1 dans une variété symplectique (M, ω, J) , qui s'intersectent en deux points $p, q \in M$. On désire « compter » les bandes pseudoholomorphes dont le bord réside dans L_0 et L_1 . L'idée est de construire un espace de modules qui paramétrise ces bandes. Sous certaines hypothèses, cet espace va pouvoir se décomposer en un nombre fini composantes connexes, dont chacune est une variété. On pourra alors compter le nombre de composantes de dimension 0.

Plus précisément, fixons une classe d'homotopie $[u] \in \pi_2(M, L_0 \cup L_1)$, et considérons l'espace $\widehat{\mathcal{M}}(p, q; [u], J)$ de toutes les bandes J -holomorphes $u : B \rightarrow M$ représentant $[u]$ et qui satisfont

1. $\lim_{s \rightarrow -\infty} u(s, t) = q, \lim_{s \rightarrow +\infty} u(s, t) = p,$
2. $u(s, 0) \in L_0, u(s, 1) \in L_1,$
3. $E(u) = \iint \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 ds dt = \int u^* \omega < \infty.$

La troisième condition dit que l'énergie de u est finie. Par définition,

$$E(u) = \int_B \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{g_J}^2 = \int_B g_J \left(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s} \right) = \int_B g_J \left(\frac{\partial u}{\partial s}, -J \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \int_B u^* \omega$$

n'est autre que l'aire symplectique de la bande u . On note donc $E(u) = \omega(u)$, et on peut voir $\omega : \pi_2(M, L_0 \cup L_1) \rightarrow \mathbb{R}$ comme un homomorphisme de groupes via l'intégration.

Remarque. Par le théorème d'uniformisation de Riemann, le disque moins deux points sur son bord, disons $D^2 \setminus \{\pm 1\}$, est biholomorphe à la bande B . Les conditions ci-dessus nous permettent alors d'étendre u à une application sur le disque, en envoyant ± 1 sur p et q . C'est dans ce sens que l'on considère $[u] \in \pi_2(M, L_0 \cup L_1)$ (voir la figure 3.1).

Remarque. Puisque ω est fermée et que L_0 et L_1 sont lagrangiens, l'énergie de u ne dépend pas de sa classe d'homotopie $[u] \in \pi_2(M, L_0 \cup L_1)$; en effet, si $h_t : D^2 \rightarrow M$

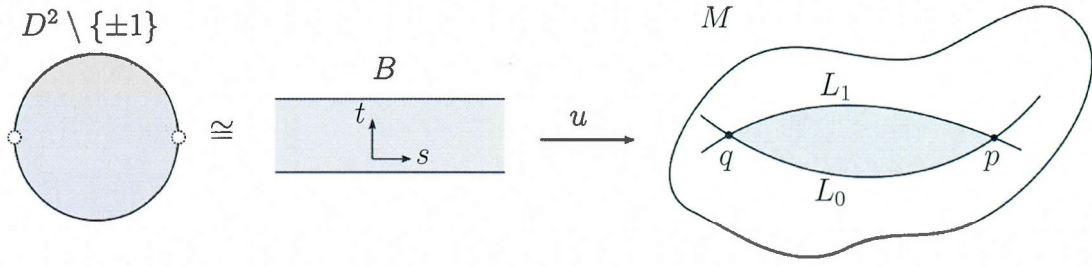


Figure 3.1 Une bande pseudoholomorphe d'indice 1 « typique »

est une homotopie relative de $u = h_0$ à $u' = h_1$ (i.e., telle que $\partial D^2 = S^1$ est envoyé dans $L_0 \cup L_1$ pour tout t), alors on a

$$0 = \int_{D^2 \times [0,1]} dh^* \omega = \int_{D^2} u^* \omega - \int_{D^2} u'^* \omega + \underbrace{\int_{S^1 \times [0,1]} h^* \omega}_0 = \int_{D^2} u^* \omega - \int_{D^2} u'^* \omega.$$

On a aussi besoin d'un autre invariant de la classe $[u]$, appelé son **indice de Maslov** et noté $\mu(u)$. D'abord, on se ramène au cas linéaire.

Définition. La **grassmannienne lagrangienne** $\mathcal{L}(n)$ est l'ensemble de tous les n -plans vectoriels lagrangiens dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

On peut caractériser les éléments de $\mathcal{L}(n)$ en termes matriciels au sens suivant :

Lemme 3.1.2. Soient X, Y deux matrices réelles de taille $n \times n$,

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

et $\Lambda = \text{Im}(Z) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Alors $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$ si et seulement si $\text{rg } Z = n$ et $X^T Y = Y^T X$.

Démonstration. Ceci découle immédiatement du calcul suivant. Soient $z, w \in \Lambda$, disons $z = Zu = (Xu, Yu)$ et $w = Zv = (Xv, Yv)$. Alors par définition de ω_0 on a

$$\omega_0(z, w) = (Xu)^T Yv - (Yu)^T Xv = u^T (X^T Y - Y^T X) v.$$

□

La Proposition 2.3.4 entraîne en particulier que $U(n) \subset Sp(2n)$, et donc que $U(n)$ agit également sur $\mathcal{L}(n)$.

Proposition 3.1.3. *L'action de $U(n)$ sur $\mathcal{L}(n)$ est transitive. Si $\Lambda_h = \mathbb{R}^n \times \{0\} \in \mathcal{L}(n)$ est le « lagrangien horizontal » de \mathbb{R}^{2n} , alors le stabilisateur de cette action en Λ_h est $O(n) \subset U(n)$ (vu comme l'ensemble des matrices unitaires purement réelles). On a donc $\mathcal{L}(n) \cong U(n)/O(n)$, et $\dim \mathcal{L}(n) = n(n+1)/2$.*

Démonstration. Pour la transitivité, montrons que pour tout n -plan lagrangien $\Lambda \in \mathcal{L}(n)$, on peut trouver $A \in U(n)$ telle que $\Lambda = A\Lambda_h$. Choisissons une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ représentée dans la base standard par une matrice

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

telle que $\Lambda = \text{Im } Z$ comme dans le lemme 3.1.2; par Gram-Schmidt, on peut supposer que les colonnes de Z sont orthonormales. Avec la condition $X^T Y = Y^T X$ donnée par le lemme, on a alors que $A = X + iY$ est unitaire, et

$$A\Lambda_h = \text{Im} \left(\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \right) \Big|_{\Lambda_h} = \text{Im} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \Lambda$$

tel que voulu. Maintenant, si $A = X + iY$ est unitaire et fixe Λ_h , on doit avoir en particulier que $Yu = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, i.e., $Y = 0$. Donc $A = X \in O(n)$. \square

L'application déterminant $\det : U(n) \rightarrow S^1$ envoie $O(n) \subset U(n)$ sur $\{\pm 1\}$. Cependant, l'application \det^2 envoie tout le groupe orthogonal sur 1 et passe donc au quotient pour donner une application

$$\det^2 : \mathcal{L}(n) \cong U(n)/O(n) \rightarrow S^1.$$

Puisque cette application est une fibration avec fibre $SU(n)/SO(n)$, qui est simplement connexe, la long suite exacte associée à une fibration entraîne que \det^2

induit un isomorphisme de groupes fondamentaux ; on a donc $\pi_1(\mathcal{L}(n)) \cong \mathbb{Z}$. (Pour plus de détails, voir (Audin et Lafontaine, 1994) ou (Michor, 2008).) Par définition, l'entier associé à une classe d'homotopie représentée par un lacet $\Lambda(t)$ de lagrangiens linéaires est appelé l'**indice de Maslov** du lacet et noté $\mu(\Lambda)$.

Remarque. Il est possible de voir l'indice de Maslov de manière plus géométrique. Le **cycle de Maslov** est une hypersurface stratifiée dans $\mathcal{L}(n)$. Elle est définie comme l'ensemble des n -plans lagrangiens qui intersectent le lagrangien vertical $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ non transversalement. Informellement, l'indice de Maslov d'un lacet générique est alors le nombre d'intersection de ce lacet avec le cycle de Maslov.

Définition. Si $L \subset (M, \omega)$ est une sous-variété lagrangienne, l'**indice de Maslov** d'une classe $[u] \in \pi_2(M, L)$ est l'entier $\mu(u) \in \mathbb{Z}$ défini ainsi : on tire en arrière le fibré tangent TM pour obtenir un fibré symplectique u^*TM au dessus du disque ; puisque le disque est contractile, on peut trivialisier u^*TM , et ce, de manière à ce que ω corresponde à ω_0 en chaque fibre (cf. (McDuff et Salamon, 1998), pp. 72-73). À l'aide de cette trivialisisation, on peut voir $u|_{\partial D^2}$ comme une application $u|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow \mathcal{L}(n)$. On définit alors $\mu(u) = \mu(u|_{\partial D^2})$.

En fait, on peut montrer que $\mu : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes.

Définition. Pour $L \subset (M, \omega)$ une sous-variété lagrangienne, on pose

$$N_L = \min(\mu(u) \mid [u] \in \pi_2(M, L), \omega(u) > 0);$$

on appelle cet entier le **nombre de Maslov** de L .

Définition. On dit qu'une sous-variété lagrangienne $L \subset (M, \omega)$ est **monotone** si $N_L \geq 2$ et si les deux homomorphismes ω et μ (intégration et indice de Maslov) sont positivement proportionnels : il existe $\rho > 0$ tel que $\rho\mu(u) = \omega(u)$ pour tout $[u] \in \pi_2(M, L)$.

On reviendra aux sous-variétés lagrangiennes monotones plus tard, une fois qu'on aura défini la cohomologie de Floer. Une classe encore plus restreinte de sous-variétés lagrangiennes est celle des sous-variétés lagrangiennes *exactes* dans une variété symplectique exacte. On dit que (M, ω) est **exacte** si $\omega = d\theta$ pour une certaine 1-forme θ , et qu'une sous-variété lagrangienne L est **exacte** si $\theta|_L$ est elle-même exacte.

3.2 Homologie de Morse (en bref)

On peut voir l'homologie de Floer comme un analogue de l'homologie de Morse en dimension infinie. Faisons donc un bref rappel de ces notions. Le lecteur peut également consulter (Schwarz, 1993) et (Audin et Damian, 2010) pour plus de détails.

Étant donné n'importe quelle variété riemannienne compacte (M, g) , il existe une grande quantité de fonctions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un « bon comportement » appelées des fonctions de *Morse-Smale*. À de telles fonctions, on peut associer des champs de pseudo-gradients ; de plus, chaque point critique x (i.e., chaque point où la dérivée de f s'annule) admet un *indice* $\text{ind}(x)$ qui, informellement, compte le nombre de directions indépendantes (à partir de x) vers lesquelles f diminue localement.

Fixons une fonction de Morse-Smale f ainsi qu'un champ de pseudo-gradients X . À chaque point critique x on associe des *variétés stable et instable*

$$W^s(x) = \{y \in M \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi^s(y) = x\} \text{ et } W^u(x) = \{y \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \phi^s(y) = x\},$$

où ϕ^s est le flot de X . On peut montrer que ces variétés sont difféomorphes à des disques ouverts, et que

$$\dim W^u(x) = \text{codim } W^s(x) = \text{ind}(x).$$

Étant donné deux points critiques x, y , soit $\widehat{\mathcal{M}}(x, y) = W^u(x) \cap W^s(y)$. Cet espace consiste en tous les points qui sont sur des trajectoires joignant x à y .

De plus, la condition de Smale (qui veut que les sous-variétés stable et instable s'intersectent transversalement) nous garantit que $\widehat{\mathcal{M}}(x, y)$ est une sous-variété de dimension $\text{ind}(x) - \text{ind}(y)$. Si $x \neq y$, \mathbb{R} agit librement sur $\widehat{\mathcal{M}}(x, y)$ par translation, d'où le quotient $\mathcal{M}(x, y) = \widehat{\mathcal{M}}(x, y)/\mathbb{R}$ est une variété de dimension $\text{ind}(x) - \text{ind}(y) - 1$.

Ainsi, $\mathcal{M}(x, y)$ est un espace de modules qui paramétrise les trajectoires allant de x à y . On a en particulier que si la différence entre les indices de x et y vaut 1, alors l'espace a dimension 0, et consiste en fait en un nombre fini de points. L'idée principale de l'homologie de Morse est donc de compter, modulo 2, le nombre de trajectoires entre les points critiques d'indices adjacents à l'aide de ces espaces de modules. Plus précisément, si on note par $\text{crit}_n(f)$ l'ensemble des points critiques d'indice n de f , le **complexe de Morse** (C_n, ∂_n) est défini par

$$C_n = \mathbb{Z}_2 \langle \text{crit}_n(f) \rangle,$$

$$\partial_n(x) = \sum_{y \in \text{crit}_{n-1}(f)} \# \mathcal{M}(x, y) y.$$

La vérification que ceci forme véritablement un complexe est une étape cruciale, qui repose sur des résultats de *compacité* et de *recollement*. Plus précisément :

Théorème 3.2.1. *Soient x, y deux points critiques de f . L'ensemble*

$$\overline{\mathcal{M}}(x, y) = \bigcup_{z_i \in \text{crit}(f)} \mathcal{M}(x, z_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(z_{q-1}, y)$$

des trajectoires et des « trajectoires brisées » de x à y peut être muni d'une topologie qui en fasse une compactification naturelle de $\mathcal{M}(x, y)$.

Théorème 3.2.2. *Si $\text{ind}(x) = \text{ind}(y) + 2$, alors $\overline{\mathcal{M}}(x, y)$ est une variété à bord compacte de dimension 1. Le bord consiste exactement en les trajectoires brisées de x à y .*

On peut trouver des preuves détaillées de ces résultats dans (Audin et Damian, 2010), pp. 55-58. Dans la figure 3.2, on voit comment l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}(x, y)$

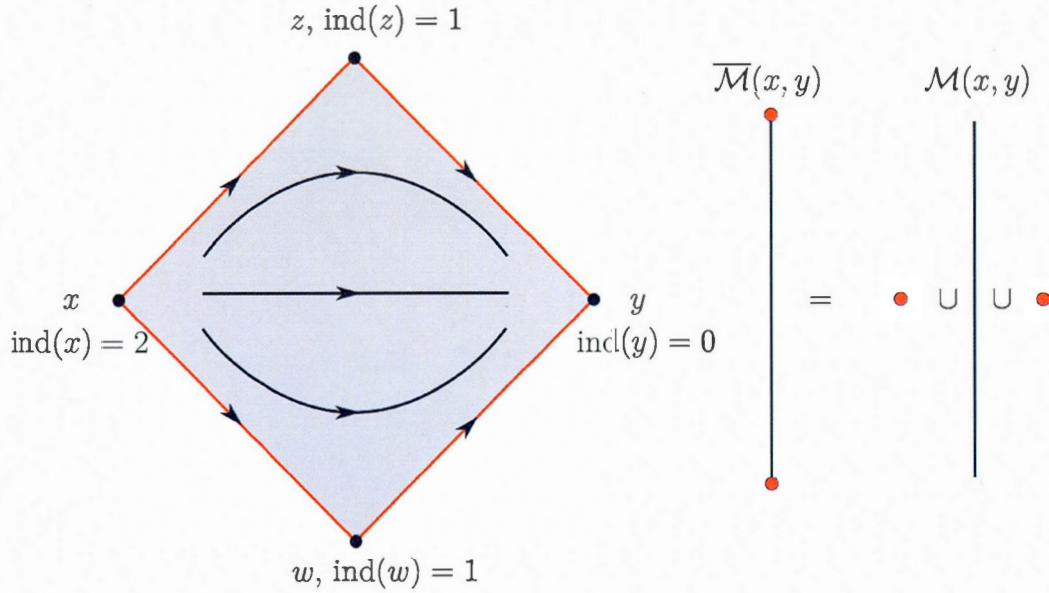


Figure 3.2 Une partie d'une surface munie d'un flot de Morse-Smale (à gauche) et l'espace de modules correspondant (à droite)

(ici, un intervalle fermé) se décompose en l'intervalle ouvert $\mathcal{M}(x, y)$ plus les deux points $\mathcal{M}(x, z) \times \mathcal{M}(z, y)$ et $\mathcal{M}(x, w) \times \mathcal{M}(w, y)$. Ceux-ci, en rouge, correspondent aux trajectoires brisées, tandis que l'intervalle ouvert correspond à la surface en gris.

On peut maintenant montrer que $\partial^2 = 0$. On a

$$\partial_n(\partial_{n+1}(x)) = \sum_{y \in \text{crit}_{n-1}(f)} \left(\sum_{z \in \text{crit}_n(f)} \# \mathcal{M}(x, z) z \right) \# \mathcal{M}(z, y) y.$$

Il suffit donc de considérer deux point critiques $x \in \text{crit}_{n+1}(f)$ et $y \in \text{crit}_{n-1}(f)$ et de montrer que

$$\sum_{z \in \text{crit}_n(f)} \# \mathcal{M}(x, z) \# \mathcal{M}(z, y) = 0.$$

Mais ce nombre est égal à la cardinalité de

$$\bigsqcup_{z \in \text{crit}_n(f)} \mathcal{M}(x, z) \times \mathcal{M}(z, y) = \partial \overline{\mathcal{M}}(x, y),$$

et il est bien connu qu'une variété à bord compacte de dimension 1 possède toujours un nombre pair de points. Puisqu'on travaille sur \mathbb{Z}_2 , on a terminé.

3.3 Cohomologie de Floer lagrangienne (en très bref)

L'homologie de Floer peut être vue comme une extension formelle de la théorie de Morse à un espace de dimension infinie, notamment, le revêtement universel de l'espace $\mathcal{P} = \mathcal{P}(L_0, L_1)$ des chemins (lisses) entre deux sous-variétés lagrangiennes compactes L_0, L_1 dans une variété symplectique (M, ω) . Autrement dit, $\gamma \in \mathcal{P}$ satisfait $\gamma(0) \in L_0$ et $\gamma(1) \in L_1$. On munit \mathcal{P} de la topologie C^∞ . Son revêtement universel $\tilde{\mathcal{P}}$ consiste en l'ensemble des paires $(\gamma, \bar{\gamma})$, où $\gamma \in \mathcal{P}$ est un chemin et $\bar{\gamma}$ est une homotopie entre γ et un chemin constant fixé γ_0 . Dans ce cadre, la « fonction de Morse » qui nous intéresse est la *fonctionnelle d'action* $\mathcal{A} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathcal{A}(\gamma, \bar{\gamma}) = - \int_{[0,1] \times [0,1]} \bar{\gamma}^* \omega.$$

La raison pour laquelle on doit passer au revêtement universel est que \mathcal{A} est seulement définie sur \mathcal{P} localement. Néanmoins, il est parfois utile de considérer la fonctionnelle d'action comme étant définie sur \mathcal{P} , modulo addition d'une constante.

Rappelons que dans le cadre de la théorie de Morse sur une variété M , les trajectoires entre les points critiques étaient données par un champ de pseudo-gradients X adapté à la fonction de Morse f . Il est à noter que l'équation différentielle gouvernant les lignes de flot $l : \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$\frac{dl}{dt} = X(l(t)),$$

est une équation différentielle ordinaire, d'où l'analyse du comportement des trajectoires de pseudo-gradient n'est pas trop difficile.

Cependant, dans le cas qui nous intéresse maintenant, la situation est plus délicate. On note d'abord qu'on peut identifier $T_\gamma \mathcal{P}$ avec l'ensemble des champs de vecteurs ξ sur M le long de γ . En fixant une structure presque complexe J

compatible avec ω , on obtient une métrique L^2 sur $\tilde{\mathcal{P}}(L_0, L_1)$ associée à g_J via

$$\tilde{g}(\xi, \eta) = \int_0^1 g_J(\xi(t), \eta(t)) dt.$$

Il est alors possible de voir que le gradient de \mathcal{A} en $\gamma \in \mathcal{P}$, sous cette métrique, est donné par

$$\text{grad } \mathcal{A}(\gamma) = J \frac{d\gamma}{dt}.$$

On a alors que

$$\text{grad } \mathcal{A}(\gamma) = 0 \iff \frac{d\gamma}{dt} = 0 \iff \gamma \in L_0 \cap L_1.$$

De plus, les lignes de gradient négatif, i.e., les applications $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$ satisfaisant $\frac{du}{ds} = -\text{grad } \mathcal{A}(u(s))$, sont exactement les applications $u : B \rightarrow M$ satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann (3.1.1). Ici, on voit u comme étant définie sur la bande B via $u(s, t) = u(s)(t)$.

C'est donc pour cette raison qu'on s'intéresse aux courbes pseudoholomorphes : en ayant toujours en tête l'analogie avec la théorie de Morse, ces courbes jouent le rôle des trajectoires de gradient entre les points critiques de la fonctionnelle d'action, qui sont tout simplement les points d'intersections des sous-variétés lagrangiennes données. Cependant, ici, l'analyse devient beaucoup plus délicate, car l'équation de Cauchy-Riemann est une équation aux dérivées partielles.

Fixons une variété symplectique (M, ω) qui est compacte, ou, du moins, qui satisfait certaines conditions de finitude (e.g., une surface de Riemann compacte dont on a retiré un nombre fini de points). On fixe aussi une structure presque complexe J compatible avec ω . Soit (L_0, L_1) une paire de sous-variétés lagrangiennes dans M . On travaille sur un corps de caractéristique 2 pour ignorer les problèmes d'orientation.

Définition. Le **complexe de Floer** $CF(L_0, L_1)$ est le \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel librement engendré par les points d'intersections de L_0 et L_1 , i.e.,

$$CF(L_0, L_1) = \mathbb{Z}_2 \langle L_0 \cap L_1 \rangle.$$

Remarque. L'étude du complexe de Floer est grandement simplifiée par l'introduction de restrictions supplémentaires sur les sous-variétés lagrangiennes L_0 et L_1 . Notamment, si celles-ci sont compactes et s'intersectent transversalement, alors le complexe est finiment engendré.

Pour les raisons ci-dessus, on va dorénavant supposer que les sous-variétés lagrangiennes considérées sont compactes et s'intersectent transversalement.

L'étape suivante est de définir une codifférentielle $d_J : CF(L_0, L_1) \rightarrow CF(L_0, L_1)$ satisfaisant $d_J^2 = 0$ (sans se préoccuper, pour l'instant, du manque de graduation sur $CF(L_0, L_1)$). Pour ce faire, on rappelle la définition de l'espace de modules $\widehat{\mathcal{M}}(p, q; [u], J) : c'est l'ensemble des solutions d'énergie finie $u : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L_0 \cup L_1)$ aux équations de Cauchy-Riemann qui sont dans la classe d'homotopie $[u] \in \pi_2(M, L_0 \cup L_1)$. Ici, $p, q \in L_0 \cap L_1$ sont des points d'intersection de L_0 et L_1 (i.e., des générateurs de $CF(L_0, L_1)$), et on requiert que $u(-1) = q$, $u(1) = p$, et que les deux demi-cercles joignant q à p soient envoyés dans les sous-variétés lagrangiennes L_0 et L_1 .$

Remarque. Si on considère ici qu'une trajectoire de p à q va, en allant de gauche à droite sur le disque D^2 (ou la bande B), de q à p , c'est qu'on utilise la convention cohomologique.

Exactement comme dans le cas de Morse, on a une \mathbb{R} -action libre sur cet espace de modules : on veut compter les bandes pseudoholomorphes joignant p à q , mais il est clair qu'une solution à (3.1.1) induit d'autres solutions par translation dans la coordonnée horizontale s . On considère donc l'espace quotient $\mathcal{M}(p, q; [u], J) = \widehat{\mathcal{M}}(p, q; [u], J)/\mathbb{R}$.

Définition. La codifférentielle de Floer $d_J : CF(L_0, L_1) \rightarrow CF(L_0, L_1)$ est l'application \mathbb{Z}_2 -linéaire donnée par

$$d_J(p) = \sum_{\substack{q \in L_0 \cap L_1 \\ [u] : \mu(u)=1}} (\#\mathcal{M}(p, q; [u], J))q \quad (3.3.1)$$

Pour l'instant, il n'est pas clair du tout que cette définition ait un sens, et encore moins que d_J soit une codifférentielle. On n'a pas non plus défini l'indice de Maslov pour un disque pseudoholomorphe dont le bord réside dans plus qu'une sous-variété lagrangienne. Ce dernier problème a au moins l'avantage d'être facilement résolu.

En effet, soit $u : (B, B_0 \cup B_1) \rightarrow (M, L_0 \cup L_1)$ une application comme ci-haut. Ici, on note $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $B_0 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B_1 = \mathbb{R} \times \{1\}$. Exactement comme on avait procédé auparavant, puisque B est contractile, on peut trivialisier symplectiquement le fibré symplectique u^*TM . Cette trivialisisation nous permet de voir $u|_{B_0}^*TL_0$ comme un chemin dans $\mathcal{L}(n)$ reliant T_qL_0 à T_pL_0 (en suivant les fibres le long de B_0). De manière analogue, on peut voir $u|_{B_1}^*TL_1$ comme un chemin dans $\mathcal{L}(n)$ reliant T_qL_1 à T_pL_1 . Il reste seulement à connecter ces deux chemins. Pour ce faire, on peut appliquer le corollaire 2.3.3 du chapitre précédent : ayant deux lagrangiens linéaires T_pL_0 et T_pL_1 dans l'espace vectoriel symplectique T_pM , on peut trouver un symplectomorphisme linéaire $A \in \text{Sp}(2n)$ les envoyant respectivement sur $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ et $i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ (ici on identifie $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$). On obtient donc un chemin de lagrangiens linéaires reliant T_pL_0 à T_pL_1 en prenant

$$t \mapsto A^{-1}((e^{i\pi t/2}\mathbb{R})^n), \quad t \in [0, 1].$$

Pareillement, on obtient un chemin de lagrangiens linéaires reliant T_qL_0 à T_qL_1 . En concaténant ces quatre chemins, on obtient bien un lacet dans $\mathcal{L}(n)$; on définit donc l'indice de Maslov de u , $\mu(u)$, comme l'indice de Maslov de ce lacet. Il est clair que cette construction se généralise à un disque dont le bord réside sur un nombre arbitraire de sous-variétés lagrangiennes.

Remarque. Il faut dire quelques mots sur le problème qui consiste à assigner une graduation au complexe $CF(L_0, L_1)$. Si on donne des orientations à L_0 et L_1 , on obtient facilement une \mathbb{Z}_2 -graduation sur $CF(L_0, L_1)$: on décrète que le degré d'un générateur $p \in L_0 \cap L_1$ est 0 si les orientations de T_pL_0 et T_pL_1 coïncident

après avoir suivi le chemin de $T_p L_0$ à $T_p L_1$ décrit ci-dessus, et 1 sinon.

Il est plus délicat d'assigner une \mathbb{Z} -graduation au complexe, puisqu'il faut alors s'assurer que l'indice d'une bande pseudoholomorphe dépende seulement de la différence entre les degrés des points d'intersections à ses extrémités. Une paire de conditions qui sont suffisantes pour qu'on puisse définir une telle graduation est : a) que la première classe de Chern de M soit de 2-torsion ; et b) que les *classes de Maslov* de L_0 et L_1 soient nulles. Pour plus de détails, voir (Auroux, 2014), p.7.

Retournons à la définition de la codifférentielle d_J . On somme sur les bandes pseudoholomorphes dont l'indice de Maslov est 1 puisque cet indice joue un rôle analogue à celui de l'indice *relatif* entre deux points critiques en théorie de Morse. En fait, pour J générique (on se rappelle que l'espace de tous les J compatibles est contractile), on aura que la dimension de $\mathcal{M}(p, q; [u], J)$ sera exactement $\mu(u) - 1$ (cf. (Ghiggini, 2014)). Même en admettant ceci, il faut trouver des hypothèses pas trop restrictives faisant en sorte que :

1. La somme apparaissant dans (3.3.1) soit finie ;
2. La codifférentielle en soit vraiment une, i.e., $d_J^2 = 0$.

Le résultat de base, dû à Floer (cf. (Floer, 1988)), est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Supposons que $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$ et $\langle \omega, \pi_2(M, L_i) \rangle = 0$. Alors d_J est bien définie, $d_J^2 = 0$, et la cohomologie de Floer lagrangienne $HF^*(L_0, L_1) = H^*(CF(L_0, L_1), d_J)$ ne dépend pas de la structure presque complexe J choisie. De plus, cette cohomologie est invariante sous isotopie hamiltonienne des L_i .*

La condition $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0$ est appelée « asphéricité symplectique » ; elle signifie simplement que la forme symplectique est nulle sur les sphères, i.e., que $\int_{S^2} u^* \omega = 0$ pour toute application $u : S^2 \rightarrow M$. L'autre condition est similaire ; elle empêche l'existence de disques d'aire symplectique non nulle dont le bord est entièrement envoyé dans un des L_i .

Il est à noter que ces conditions sont assez restrictives : il y a peu d'exemples de variétés symplectiques et de sous-variétés lagrangiennes connus qui les satisfont (Oh, 1993). Néanmoins, c'est historiquement la première situation où on a pu montrer que d_J est une codifférentielle. La preuve suit la même philosophie que celle qui démontre que la différentielle en est bien une en homologie de Morse, mais les problèmes techniques sont beaucoup plus sérieux. Les deux problèmes majeurs sont : la *transversalité* des espaces modules (pour s'assurer que les espaces de modules se décomposent bien en variétés), et leur *compacité* (pour que les espaces de modules de dimension 0 possèdent un nombre fini de points que l'on peut compter).

On ne va pas trop s'attarder sur ces problèmes techniques ; le lecteur intéressé peut consulter (Audin et Damian, 2010) ou (Floer, 1988). En très bref :

1. En supposant toujours que nos paires de sous-variétés lagrangiennes s'intersectent transversalement, il est possible de résoudre les problèmes de transversalité des espaces de modules en considérant une *famille générique* J_t ($t \in [0, 1]$) de structures presque complexes compatibles avec ω et en modifiant l'équation de Cauchy-Riemann (3.1.1) en conséquence.

Il est cependant plus difficile, et même parfois impossible, de supprimer l'hypothèse de transversalité des sous-variétés lagrangiennes (par exemple, dans le but de pouvoir définir $CF(L_0, L_0)$). Il est parfois possible de résoudre le problème en ajoutant un *terme de perturbation* à l'équation de Cauchy-Riemann : pour ce faire, on choisit une fonction hamiltonienne générique $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dépendant du temps, et on considère l'équation modifiée

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(t, u) \right) = 0.$$

Ici, X_H est le champ de vecteurs hamiltonien (dépendant du temps) associé à la fonction hamiltonienne H . Dans ce cadre plus général, les générateurs du complexe de Floer associé aux sous-variétés lagrangiennes L_0, L_1 sont les

intersections de L_0 avec $(\phi_H^1)^{-1}(L_1)$, où ϕ_H^t est le flot associé à X_H .

2. La compacité des espaces de modules repose crucialement sur un résultat fondamental appelé le *théorème de compacité de Gromov*. Ce théorème gère la convergence de suites de courbes pseudoholomorphes dont l'énergie est uniformément bornée ; il nous assure qu'une telle suite admet une sous-suite qui converge vers un *arbre nodal de bulles*. Ces bulles correspondent à des endroits où l'énergie s'accumule au fur et à mesure qu'on progresse dans la suite de courbes.

Dans le cas où $u : B \rightarrow M$ est une bande pseudoholomorphe, il y a trois scénarios possibles :

- (a) Si l'énergie se concentre à un des deux bouts de la bande, on obtient une bande brisée (ce scénario est favorable ; en analogie avec l'homologie de Morse, on veut que la compactification de notre espace consiste en l'ajout de trajectoires brisées pour avoir que $d_J^2 = 0$).
- (b) Si l'énergie se concentre sur le bord de la bande, on obtient un *disque* pseudoholomorphe dont le bord est entièrement envoyé sur L_0 ou L_1 .
- (c) Si l'énergie se concentre sur un point intérieur de la bande, on obtient une *sphère* pseudoholomorphe dans M .

Les deux derniers scénarios sont problématiques : en général, la présence de bulles, i.e., de disques ou de sphères pseudoholomorphes dans M , forme une obstruction à ce que d_J soit une codifférentielle. Évidemment, les hypothèses du théorème 3.3.1 tuent les bulles avant même qu'elles puissent apparaître.

Une façon d'obtenir les hypothèses ci-dessus est de ne considérer que des sous-variétés lagrangiennes *exactes* dans des variétés symplectiques exactes. Dans ce cadre, le théorème de Stokes tue automatiquement les bulles (qui ont forcément une aire symplectique strictement positive). Le prix à payer est qu'*aucune variété symplectique fermée n'est exacte* : si $\omega = d\theta$, alors la forme volume $\omega^n = d(\theta \wedge \omega^{n-1})$

est exacte, ce qui est absurde si M est fermée. Il faut donc contrôler de près la géométrie à l'infini de la variété sous considération. Seidel (cf. (Seidel, 2008)) a étudié ces variétés symplectiques exactes en détail, et a défini les catégories de Fukaya pour celles-ci.

Une classe plus générale de variétés symplectiques pour lesquelles il est largement possible d'utiliser la cohomologie de Floer est celle des variétés symplectiques monotones. Oh (Oh, 1993) a introduit la notion de sous-variété lagrangienne monotone et la cohomologie de Floer de telles sous-variétés. Encore là, il y a beaucoup de travail à faire pour arriver à une théorie qui tient la route. En particulier, il n'est pas nécessairement vrai que $d_J^2 = 0$ dans le cas monotone ; en supposant que les images des morphismes d'inclusion $\pi_1(L_i) \rightarrow \pi_1(M)$ soient de torsion, on a en général que $d_J^2 = d_{L_0} - d_{L_1}$, où, informellement, d_{L_i} compte (modulo 2) le nombre de disques pseudoholomorphes passant par un point générique de L_i .

3.4 La catégorie de Fukaya

On va maintenant noter par $\mu^1 = d_J : CF(L_0, L_1) \rightarrow CF(L_0, L_1)$ la codifférentielle de Floer. Cette notation suggère qu'on peut voir μ^1 comme la première opération d'une certaine suite μ^k qui va définir une A_∞ -catégorie (voir le premier chapitre). Pour voir comment on peut généraliser la codifférentielle de Floer à une application

$$\mu^k : CF(L_{k-1}, L_k) \otimes \cdots \otimes CF(L_0, L_1) \rightarrow CF(L_0, L_k)$$

pour chaque $k = 1, 2, \dots$, notons qu'on peut voir μ^1 comme une application qui compte les « polygones pseudoholomorphes à deux côtés » en voyant le disque D^2 avec ses deux points ± 1 mis en évidence comme un polygone à deux côtés. Ainsi, de manière analogue, μ^2 va compter les « triangles pseudoholomorphes » dont les trois sommets sont envoyés sur les trois points d'intersections de L_0, L_1 et L_2 (générateurs des $CF(L_i, L_{i+1})$ en question) et les arêtes sont envoyées dans les sous-variétés

lagrangiennes correspondantes ; μ^3 va compter les « carrés pseudoholomorphes, » et ainsi de suite.

La construction des μ^{k+1} est donc entièrement analogue à celle de μ^1 : si on a $k + 1$ sous-variétés lagrangiennes compactes L_0, L_1, \dots, L_k qui s'intersectent transversalement deux à deux en $p_i \in L_{i-1} \cap L_i$ ($i = 1, \dots, k$) et $q = L_0 \cap L_k$, on considère l'espace de modules $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_k, q; [u], J)$ de toutes les applications J -holomorphes $u : D_{z_i} \rightarrow M$ d'énergie finie et dans $[u]$ qui s'étendent continument à tout le disque D^2 . Ici $D_{z_i} = D^2 \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$ est un disque duquel on a retiré $k + 1$ points $z_i \in S^1$ (supposés distincts et ordonnés cycliquement) de son bord. On requiert de plus que $u(z_0) = q$, $u(z_i) = p_i$ pour $i = 1, \dots, k$, et que les arcs entre les z_i soient envoyés dans les sous-variétés lagrangiennes correspondantes.

Pour un J générique et des points $z_0, z_1, \dots, z_k \in S^1$ *fixés*, la dimension de l'espace de modules correspondant est encore donnée par l'indice de Maslov $\mu(u)$. Cependant, il faut tenir compte de l'ambiguïté des positions des z_i , modulo une reparamétrisation du domaine de u , en ajoutant un facteur de $(S^1 \times \dots \times S^1) / \text{Aut}(D^2)$ à cet espace. Puisque $\text{Aut}(D^2) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a dimension 3, on a que la dimension attendue de $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_k, q; [u], J)$ est $\mu(u) + (k + 1) - 3 = \mu(u) + k - 2$. On a donc la

Définition. Pour chaque $k \geq 1$, l'**opération de Floer d'ordre k** est l'application \mathbb{Z}_2 -linéaire $\mu^k : CF(L_{k-1}, L_k) \otimes \dots \otimes CF(L_0, L_1) \rightarrow CF(L_0, L_k)$ donnée par

$$\mu^k(p_k \otimes \dots \otimes p_1) = \sum_{\substack{q \in L_0 \cap L_k \\ [u] : \mu(u) = 2-k}} (\#\mathcal{M}(p_1, \dots, p_k, q; [u], J))q.$$

En analogie avec le cas $k = 1$, il y a de nombreux obstacles techniques à surmonter pour que cette définition tienne debout. On peut consulter (Seidel, 2008) pour un traitement en profondeur de ces considérations, du moins dans le cas exact. On peut aussi y trouver une preuve du théorème suivant :

Théorème 3.4.1 (Proposition 12.3 dans Seidel). *Si (M, ω) est une variété symplectique exacte et que les sous-variétés lagrangiennes sous considération sont exactes, alors les opérations de Floer μ^k satisfont les relations d' A_∞ -associativité (1.3.1) du chapitre 1.*

La preuve de ce théorème repose sur une analyse délicate des espaces de modules $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_k, q; [u], J)$ de dimension 1 (i.e., lorsque $\mu(u) = 3 - k$) et de leur compactification, dite de « Deligne-Mumford-Stasheff. »

Remarque. Encore une fois, il est possible de faire les choses dans une plus grande généralité ; le prix à payer est que les constructions deviennent très élaborées. Les intéressés peuvent consulter les travaux monumentaux de Fukaya, Oh, Ohta et Ono (Fukaya *et al.*, 2009), où on trouve entre autres de la théorie de l'obstruction et des structures de Kuranishi.

Définition. Soit (M, ω) une variété symplectique exacte (resp. monotone). La **catégorie de Fukaya** $\mathcal{F}(M)$ est la pré- A_∞ -catégorie définie ainsi :

- Ses objets sont les sous-variétés lagrangiennes compactes et exactes (resp. monotones) de M .
- Pour toute paire (L_0, L_1) d'objets distincts, on pose $\text{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(L_0, L_1) = CF(L_0, L_1)$. Les morphismes $\mu_{\mathcal{F}(M)}^k = \mu^k$ sont les opérations de Floer et satisfont les relations d' A_∞ -associativité par le Théorème 3.4.1 et la remarque sous-jacente.

Remarque. Comme on l'a remarqué plus tôt, étant donné deux objets distincts L_0 et L_1 , il faut généralement choisir des données supplémentaires (faire varier la structure presque complexe, choisir une fonction hamiltonienne de perturbation) pour assurer la transversalité des espaces de modules. Pour être rigoureux, ces données doivent donc être intégrées à $\text{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(L_0, L_1)$.

Remarque. On dit *pré- A_∞ -catégorie* puisqu'on n'a pas défini le complexe de Floer $CF(L_0, L_1)$ dans le cas où $L_0 = L_1$. Néanmoins, du moins dans le cas exact, il est possible de le faire et d'obtenir une vraie A_∞ -catégorie (cf. (Seidel, 2008)).

3.5 Générateurs et la catégorie de Fukaya dérivée

Il est généralement très difficile d'expliciter la catégorie de Fukaya $\mathcal{F}(M)$ d'une variété symplectique donnée. Une stratégie générale d'attaque pour ce problème est de trouver une classe spéciale de sous-variétés lagrangiennes $\{L_i\}$ qui *engendrent* la catégorie de Fukaya (dans un sens qui va être précisé plus loin), puis de calculer $\bigoplus_{i,j} HF^*(L_i, L_j)$ (Smith, 2014).

Pour définir plus précisément la notion de générateur, il faut d'abord plonger $\mathcal{F}(M)$ dans la A_∞ -catégorie triangulée des **complexes tordus** $\text{Tw } \mathcal{F}(M)$. Informellement, c'est une A_∞ -catégorie obtenue à partir de $\mathcal{F}(M)$ en ajoutant à chaque morphisme μ^1 -fermé un A_∞ -analogue du cône d'application de ce morphisme. Ou bien, on peut penser au passage de $\mathcal{F}(M)$ à $\text{Tw } \mathcal{F}(M)$ comme à un A_∞ -analogue du passage d'une catégorie abélienne \mathcal{A} à sa catégorie de complexes $C(\mathcal{A})$. On pourrait entrer dans les détails de cette construction, mais on va seulement en donner les idées essentielles. Le lecteur intéressé peut consulter (Seidel, 2008).

Un objet (L, δ_L) de $\text{Tw } \mathcal{F}(M)$ est la donnée d'une somme directe formelle $L = L_1[k_1] \oplus \cdots \oplus L_n[k_n]$ d'objets gradués de $\mathcal{F}(M)$, ainsi que d'une codifférentielle $\delta_L : L \rightarrow L[1]$ strictement triangulaire inférieure et qui satisfait une règle de A_∞ -compatibilité. Un morphisme entre deux objets de $\text{Tw } \mathcal{F}(M)$ est une collection de morphismes entre leurs différentes composantes, et les opérations de composition $\mu_{\text{Tw } \mathcal{F}(M)}^k$ « tordent » les opérations de Floer μ_F^k à l'aide des codifférentielles des objets impliqués.

Définition. La **catégorie de Fukaya dérivée** $D\mathcal{F}(M)$ est, par définition, $D\mathcal{F}(M) = H(\text{Tw } \mathcal{F}(M))$, i.e., la catégorie cohomologique de l' A_∞ -catégorie des complexes tordus sur la catégorie de Fukaya.

Tout objet de $\mathcal{F}(M)$ peut être naturellement vu comme un objet de $\mathrm{Tw} \mathcal{F}(M)$ (et donc de $D\mathcal{F}(M)$ également). En fait, on peut trouver dans (Seidel, 2008) les résultats suivants :

Proposition 3.5.1. *$\mathrm{Tw} \mathcal{F}(M)$ forme une A_∞ -catégorie triangulée, dans laquelle $\mathcal{F}(M)$ se plonge pleinement et fidèlement.*

L'idée importante est que le passage à l' A_∞ -catégorie des complexes tordus nous permet de construire des cônes d'applications : étant donné un $\mu_{\mathrm{Tw} \mathcal{F}(M)}^1$ -cocycle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(L, L')$ de degré zéro, on a un **cône d'application abstrait**

$$\mathrm{Cone}(f) = \left(L[1] \oplus L', \begin{pmatrix} \delta_L & 0 \\ f & \delta_{L'} \end{pmatrix} \right).$$

Définition. Soient $L_0, L_1 \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(M)$ des sous-variétés lagrangiennes, et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(M)}(L_0, L_1)$ un morphisme $\mu_{\mathcal{F}(M)}^1$ -fermé de degré zéro. On dit que $L' \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(M)$ est un **cône d'application** de f si, au niveau de $\mathrm{Tw} \mathcal{F}(M)$, L' est quasi-isomorphe à $\mathrm{Cone}(f)$.

Malgré la lourdeur algébrique des définitions ci-dessus, il existe, dans la catégorie de Fukaya $\mathcal{F}(M)$, des exemples assez géométriques de cônes d'applications, provenant notamment de tours de Dehn et de chirurgies lagrangiennes.

Exemple. Soit S un cercle lagrangien dans le cylindre $M = S^1 \times \mathbb{R} \cong T^*S^1$; le tour de Dehn est un symplectomorphisme $\tau_S : M \rightarrow M$ qui est l'identité hors d'un voisinage de S et qui tourne le cylindre à l'intérieur du voisinage. Seidel a montré qu'il existe un triangle exact dans $D\mathcal{F}(M)$ de la forme

$$HF^*(S, L) \otimes S \rightarrow L \rightarrow \tau_S(L) \rightarrow HF^*(S, L)[1],$$

où L est n'importe quelle sous-variété lagrangienne de M . Ce triangle provient du fait que $\tau_S(L)$ est quasi-isomorphe au cône d'application abstrait du morphisme d'évaluation $HF^*(S, L) \otimes S \rightarrow L$.

Cet exemple se généralise à une sphère lagrangienne S dans une variété symplectique quelconque en appliquant le théorème des voisinages tubulaires de Weinstein (Théorème 2.2.3) pour se ramener à un voisinage de S dans T^*S^n , où l'analogue du tour de Dehn est défini à l'aide du flot géodésique.

L'existence de cônes d'applications entraîne que $\mathrm{Tw} \mathcal{F}(M)$ est une A_∞ -catégorie triangulée, et que la catégorie dérivée $D\mathcal{F}(M)$ est une catégorie triangulée au sens ordinaire. Les triangles exacts permettent notamment d'obtenir des suites exactes longues dans la catégorie cohomologique.

On peut maintenant clarifier les termes employés au début de cette section :

Définition. On dit qu'une famille $\{L_i\}$ de sous-variétés lagrangiennes **engendrent** $\mathcal{F}(M)$ **par scindements** (*split-generate*, en anglais) si tout objet de $\mathcal{F}(M)$ est quasi-isomorphe à une composante d'un complexe tordu sur les $\{L_i\}$.

Exemple. Considérons le tore T^2 avec sa forme symplectique usuelle (i.e., sa forme volume). Il est possible de montrer, cf. (Smith, 2014) section 5.1, que $\mathcal{F}(T^2)$ est engendré par scindements par un méridien et une longitude. Même si cet exemple semble relativement simple, on a besoin d'outils qui sortent du cadre de ce mémoire pour démontrer cette affirmation.

CONCLUSION

En ces quelques pages, on espère avoir donné au lecteur une bonne idée de ce que sont les catégories de Fukaya, malgré le fait qu'on a très peu parlé de leurs applications. Pour terminer, on mentionne deux directions intéressantes vers lesquelles on peut poursuivre l'étude des catégories de Fukaya.

D'abord, il y a la fameuse conjecture de la symétrie miroir homologique de Kontsevich (c.f. (Kontsevich, 1995)). Cette conjecture est profonde et ses implications, autant pour les mathématiques que pour la physique mathématique, sont beaucoup trop vastes pour qu'on puisse lui faire justice en quelques lignes. Néanmoins, pour résumer, elle dit essentiellement qu'il existe une équivalence de catégories triangulées entre la catégorie de Fukaya dérivée $DF(M)$ d'une variété symplectique M et la catégorie dérivée des faisceaux cohérents (cf. (Kashiwara et Schapira, 1994)) sur son *miroir* \hat{M} , qui est une variété algébrique complexe. La notion de symétrie miroir provenant originalement de la physique, Kontsevich avait énoncé cette conjecture pour des variétés symplectiques de Calabi-Yau. Cependant, elle inclut maintenant une plus grande classe de variétés symplectiques. Cette conjecture est particulièrement fascinante du fait qu'elle suggère un lien très profond entre la topologie symplectique et la géométrie algébrique. Elle a été démontrée pour les courbes elliptiques, la surface quartique K3, et les produits de ces variétés (pour des références, voir le début de (Abouzaid *et al.*, 2013)).

Dans une autre direction, les travaux récents de Biran-Cornea (cf. (Biran et Cornea, 2013)) relient la notion de *cobordisme lagrangien* à la catégorie de Fukaya dérivée. Dans le contexte de leurs travaux, un cobordisme lagrangien entre des

sous-variétés lagrangiennes $L_0, \dots, L_k \subset M$ est essentiellement une sous-variété lagrangienne de $M \times \mathbb{R}^2$ dont le bord est composé des L_i . Les auteurs montrent qu'il existe une façon algébrique d'interpréter ces cobordismes : ils correspondent, de manière fonctorielle, à des décompositions triangulaires itérées dans la catégorie de Fukaya dérivée. Il existe une catégorie monoïdale $Cob(M)$ dont les objets sont des familles finies de sous-variétés lagrangiennes et les morphismes sont des classes d'isotopie de cobordismes lagrangiens. Le théorème de Biran-Cornea dit alors qu'il existe un foncteur monoïdal

$$F : Cob(M) \rightarrow T^S D\mathcal{F}(M)$$

qui préserve les sous-variétés lagrangiennes. Ici, $T^S D\mathcal{F}(M)$ est une extension de $D\mathcal{F}(M)$ qui est monoïdale et dont les ensembles de morphismes paramétrisent certaines résolutions d'objets par des triangles exacts itérés.

Il existe beaucoup d'autres applications des catégories de Fukaya ; on invite le lecteur intéressé à consulter (Smith, 2014), qui donne un bon compte rendu de la situation actuelle.

RÉFÉRENCES

- Abouzaid, M., Auroux, D., Efimov, A. I., Katzarkov, L. et Orlov, D. (2013). Homological mirror symmetry for punctured spheres. *J. Amer. Math. Soc.*, 26(4), 1051–1083.
- Aebischer, B., Borer, M., Kälin, M., Leuenberger, C. et Reimann, H. M. (1994). *Symplectic geometry*, volume 124 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel. An introduction based on the seminar in Bern, 1992.
- Audin, M. et Damian, M. (2010). *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris.
- Audin, M. et Lafontaine, J. (dir.) (1994). *Holomorphic curves in symplectic geometry*, volume 117 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Auroux, D. (2014). A beginner’s introduction to Fukaya categories. In *Contact and Symplectic Topology* 85–136. Springer.
- Bertrand, T. (2011). Lectures on DG-categories. In *Topics in algebraic and topological K-theory* 243–302. Springer.
- Biran, P. et Cornea, O. (2013). Lagrangian cobordism ii. *arXiv preprint arXiv :1304.6032*.
- Da Silva, A. C. (2001). *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764. Springer.
- Floer, A. (1988). Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom.*, 28(3), 513–547.
- Fukaya, K., Oh, Y.-G., Ohta, H. et Ono, K. (2009). *Lagrangian intersection Floer theory : anomaly and obstruction. Part I*, volume 46 de *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Somerville, MA.
- Gelfand, S. I. et Manin, Y. I. (2003). *Methods of homological algebra* (deuxième éd.). Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

- Ghiggini, P. (2014). Lagrangian Floer homology. Notes de cours disponibles à l'adresse <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~ghiggini/corsi/Symp2014/chapter3.2.pdf> ; accédé pour la dernière fois le 6 septembre 2014.
- Hilton, P. J. et Stammbach, U. (1997). *A course in homological algebra* (deuxième éd.), volume 4 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- Kashiwara, M. et Schapira, P. (1994). *Sheaves on manifolds*, volume 292 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin. With a chapter in French by Christian Houzel, Corrected reprint of the 1990 original.
- Kontsevich, M. (1995). Homological algebra of mirror symmetry. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, 120–139. Birkhäuser, Basel.
- Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds* (deuxième éd.), volume 218 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York.
- McDuff, D. et Salamon, D. (1998). *Introduction to symplectic topology* (deuxième éd.). Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
- Michor, P. W. (2008). *Topics in differential geometry*, volume 93 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI.
- Mitchell, B. (1965). *Theory of categories*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII. Academic Press, New York-London.
- Oh, Y.-G. (1993). Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(7), 949–993.
- Schwarz, M. (1993). *Morse homology*, volume 111 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel.
- Seidel, P. (2008). *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich.
- Smith, I. (2014). A symplectic prolegomenon. *arXiv preprint arXiv:1401.0269*.
- Verdier, J.-L. (1977). *Catégories dérivées quelques résultats (Etat 0)*. Springer.
- Weibel, C. A. (1994). *An Introduction to Homological Algebra*, volume 38 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Weinstein, A. (1971). Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6, 329–346 (1971).

Weinstein, A. (1981). Symplectic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 5(1), 1–13.